

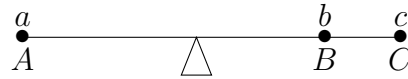
1 Logique, langage mathématique et raisonnement

Exercice 1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- Pour qu'un nombre entier n divise le nombre entier m , il faut que chaque facteur premier de n soit un facteur premier de m .
- Pour qu'un nombre entier n divise le nombre entier m , il suffit que chaque facteur premier de n soit un facteur premier de m .
- Pour que deux cercles du plan n'aient pas d'intersection, il faut et il suffit que la distance entre leurs centres soit supérieure strictement à la somme de leurs rayons.
- Pour que 4 points du plan forment un parallélogramme, il faut et il suffit que leurs diagonales se coupent en leur milieu.

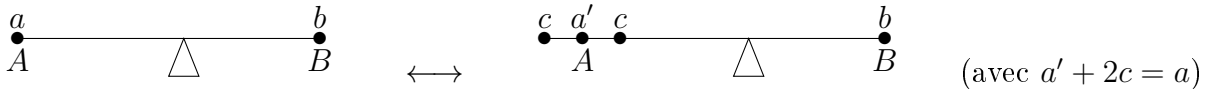
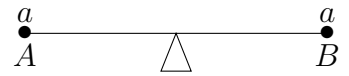
Exercice 2 **Axiomatique**

On considère des poids situés sur une tige en différents points. On cherche à déterminer la position du point sur lequel doit être posée la tige afin de réaliser l'équilibre du système.



Pour résoudre ce problème, Archimède partait de deux postulats :

- S'il y a deux poids de même masse en deux points A et B , le point d'équilibre est situé au milieu du segment $[AB]$.
- Lorsqu'on a un équilibre, cet équilibre n'est pas modifié si une partie d'un poids situé en A est divisée en deux poids de même masse répartis de part et d'autre et à égale distance du point A .



À partir de ces postulats, déterminer la position d'équilibre pour deux poids de masses $a = 5$ et $b = 3$.

Exercice 3 **Démonstrations erronées**

Voici quelques propositions suivies de démonstrations incorrectes. Pour chacune, déterminer l'argument invalide, puis démontrer correctement ou infirmer la proposition.

Proposition 1

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists x \in \mathbf{R}, |f(x)| \leq \frac{x}{n}$.

Alors f s'annule en un point de $\mathbf{R}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$ tels que $|f(x)| \leq \frac{x}{n}$. Or cette propriété est vraie pour tout entier strictement positif n . Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$, on obtient $|f(x)| \leq 0$ et donc $f(x) = 0$. Ainsi la fonction f s'annule en x .

Proposition 2

Soit $p \in \mathcal{P}$, $b \in \mathbf{N}$ et $c \in \mathbf{N}$. Si p divise $b^2 - 4c$, alors il existe un entier relatif x tel que p divise

$$x^2 + bx + c.$$

Démonstration.

Soient $p \in \mathcal{P}$, $b \in \mathbf{N}$ et $c \in \mathbf{N}$ tels que p divise $b^2 - 4c$. Notons pour x dans $\mathbf{Z}$, $P(x) = x^2 + bx + c$. Alors $4P(x) = 4x^2 + 4bx + 4c = (2x + b)^2 + 4c - b^2$. Il existe $x \in \mathbf{Z}$ tel que p divise $2x + b$: selon que p et b ont la même parité ou non, on peut prendre $x = \frac{p-b}{2}$ ou $x = \frac{2p-b}{2}$. Alors, pour un tel entier x , p divise $(2x + b)^2$. Or, par hypothèse, p divise $4c - b^2$. Donc p divise $4P(x)$. On peut donc conclure que p divise $x^2 + bx + c$ et la proposition est démontrée.

Proposition 3

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$, n points du plan.

Alors ces n points sont tous alignés sur une même droite.

Démonstration.

Démontrons le résultat par récurrence sur n .

Initialisation : soit $n = 1$ et A_1 un point du plan. Ce point est clairement aligné avec lui-même et la proposition est vérifiée.

Regardons également le cas $n = 2$. Soit A_1 et A_2 deux points du plan. Ils appartiennent à une même droite (la droite (AB)) et la proposition est vérifiée.

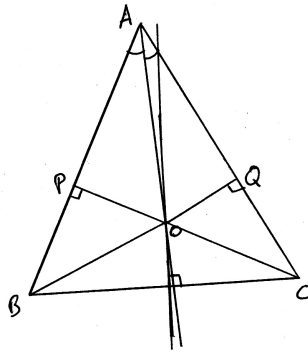
Hérédité : supposons la propriété vérifiée au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

Soient $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ $n + 1$ points du plan. Le sous-ensemble $A_1, A_2, \dots, A_n$ est un ensemble de n points du plan. D'après l'hypothèse de récurrence, ces points sont alignés et appartiennent à une même droite D . De même $A_2, A_3, \dots, A_{n+1}$ est un ensemble de n points. Ces points sont donc alignés. Or les points $A_2, A_3, \dots, A_n$ étant alignés sur la droite D , le point A_{n+1} est nécessairement aussi sur cette droite. Nous avons donc montré que les $n + 1$ points étaient alignés sur la droite D et la propriété d'hérédité est vérifiée.

Nous avons donc montré par récurrence que n points du plan sont toujours alignés.

Proposition 4

Tous les triangles sont isocèles.



Démonstration.

Soit ABC un triangle. Nous allons montrer que $AB = AC$.

Soit O le point d'intersection de la bissectrice de l'angle BAC et de la médiatrice du segment $[AB]$. Soit P le projeté de O sur la droite (AB) et Q le projeté de O sur la droite (AC) .

Comme O est sur la bissectrice de l'angle BAC , les longueurs OP et OQ sont égales. Les triangles APO et AQO ont chacun un angle droit, l'un en P et l'autre en Q . Comme ils ont un angle égal et deux côtés égaux ($OP = OQ$ et $OA = OA$), ces deux triangles sont égaux. On en déduit que $AP = AQ$.

D'autre part, O étant sur la médiatrice de $[AB]$, les longueurs OB et OC sont égales. Pour la même raison que ci-dessus, on en déduit que les triangles OBP et OCQ sont égaux. Ainsi $BP = CQ$.

Enfin, on peut conclure $AB = AP + BP = AQ + CQ = AC$. Les longueurs AB et AC sont donc égales et le triangle est isocèle.

2 Arithmétique

Exercice 4 Démontrer que si a et b sont deux nombres entiers premiers entre eux, alors les nombres $a + b$ et ab sont également premiers entre eux. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5

1. Appliquer l'algorithme d'Euclide pour montrer que 1023 et 262 sont premiers entre eux.

2. Vérifier que $\frac{1023}{262} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12}}}}$.

(Cette écriture est appelée développement en fraction continue de $\frac{1023}{262}$.)

3. Quel lien remarque-t-on entre les deux questions ?

Exercice 6 Soit n un entier naturel non nul. Existe-t-il n nombres entiers consécutifs tels qu'aucun d'entre eux ne soit premier ?

Exercice 7 Les nombres entiers de la forme 101, 10101, 1010101, $\dots$, 101 $\cdots$ 101 écrits avec $k+1$ uns et k zéros disposés alternativement peuvent-ils être premiers ?

Indication : en notant n un tel nombre, on pourra considérer $11n$ et factoriser ce nombre.

3 Ensembles et applications

Exercice 8 Soient A, B et C des parties d'un ensemble E . Démontrer ou infirmer les propositions suivantes.

1. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
3. $A \cap (B \cup C) \subset A \cup B$.
4. $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) = B$.
5. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
6. $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.
7. $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.

Exercice 9 On appelle *nombre algébrique* tout nombre réel qui est racine d'un polynôme à coefficients entiers. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit *transcendant*.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré n à coefficients entiers est un ensemble dénombrable.
2. En déduire que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable.
3. En déduire que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
4. En déduire qu'il existe des nombres transcendants. L'ensemble des nombres transcendants est-il dénombrable ?

4 Nombres complexes

Exercice 10 Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$. Calculer les sommes suivantes.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(kx), \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx).$$

Exercice 11 Calculer les intégrales suivantes à l'aide de linéarisations.

$$\int_0^\pi \cos^3(x) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(x) \sin(x) dx, \quad \int_{-\pi}^\pi \sin^4(x) dx, \quad \int_{-\pi}^\pi \cos^4(x) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5(x) \cos(x) dx.$$

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $\cos(x) + \sin(x) = 1$.

Exercice 13 Soit $n \in \mathbf{N}$. On dit que n est somme de deux carrés s'il existe $r \in \mathbf{N}$ et $s \in \mathbf{N}$ tels que $n = r^2 + s^2$.

Soient $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}$ des sommes de deux carrés. Montrer alors que le produit ab est également somme de deux carrés. (*L'expression $r^2 + s^2$ peut faire penser à un module.*)

Le vérifier sur des exemples.

5 Matrices

Exercice 14 Pour x dans $\mathbf{R}$, on note $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbf{R}$, $M(x)M(y) = M(x+y)$.
2. En déduire que pour tout x , $M(x)$ est inversible et donner son inverse.
3. Déduire de tout cela que l'application $x \mapsto M(x)$ définit un morphisme entre deux groupes à préciser.
4. Déduire également l'expression de A^n pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 15 Un groupe de matrices.

Pour a et b dans $\mathbf{R}$, notons $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ définie par $M(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a & b \\ 0 & 1 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Notons H l'ensemble des matrices $M(a, b)$:

$$H = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbf{R}^2\}.$$

1. Montrer

$$\forall (a, b, a', b') \in \mathbf{R}^4, \quad M(a, b)M(a', b') = M(a + a', b + b').$$

2. En déduire que toute matrice $M(a, b)$ de H est inversible et donner l'expression de son inverse.
3. Conclure que H est un sous-groupe du groupe $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$ des matrices inversibles et qu'il est commutatif.
4. Montrer également que l'application $(a, b) \mapsto M(a, b)$ est un isomorphisme entre les groupes $(\mathbf{R}^2, +)$ et $(H, \times)$.
5. Soient a et b des réels et n un entier positif. Donner l'expression de $(M(a, b))^n$.
6. En déduire $(M(a, b) - I_4)^4$ en utilisant la formule du binôme.
7. Retrouver le fait que $M(a, b)$ est inversible et l'expression de son inverse.
8. Que peut-on également déduire sur $M - I_4$?

Exercice 16 Étude d'une application matricielle.

Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$. On note matriciellement $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tout vecteur (x, y) de $\mathbf{R}^2$.

On considère l'application linéaire φ définie de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ que l'on écrit matriciellement sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ X &\mapsto MX \end{aligned}$$

1. Calculer M^2 . Qu'en déduit-on sur φ ?
2. Déterminer l'ensemble D_1 des vecteurs X de $\mathbf{R}^2$ tels que $\varphi(X) = X$.

3. Déterminer l'ensemble D_2 des vecteurs X de $\mathbf{R}^2$ tels que $\varphi(X) = -X$.
4. Soit $X \in \mathbf{R}^2$. Montrer qu'il existe $X_1 \in D_1$ et $X_2 \in D_2$ tels que $X = X_1 + X_2$.
5. En déduire $\varphi(X)$. Décrire géométriquement l'application φ .

Exercice 17 **Application linéaire bijective.**

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible à coefficients réels. On définit l'application φ de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}^n$ qui à un vecteur colonne $X \in \mathbf{R}^n$ associe $\varphi(X) = MX$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme du groupe $(\mathbf{R}^n, +)$.
2. Montrer que φ est injective.
3. Montrer que φ est surjective.
4. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $X \in \mathbf{R}^3$ tel que $MX = Y$.