STH2, Généralités sur les surfaces — *mai 2013*

Contrôle 1

Les calculatrices sont interdites. Une feuille de notes A4 manuscrite est autorisée.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.

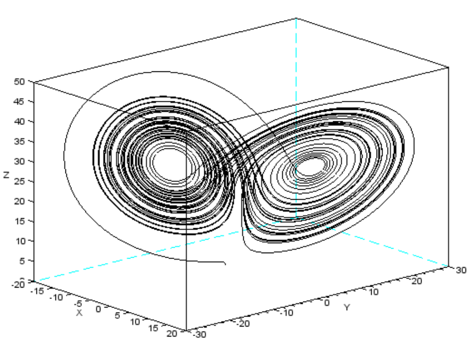
Le but de cet exercice est de comprendre le théorème de Poincaré-Bendixson énoncé ci-dessous. Nous l'admettrons et nous contenterons d'étudier trois exemples particuliers.

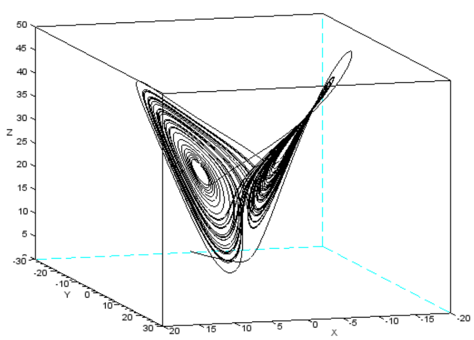
Théorème de Poincaré-Bendixson :
Soit φ un champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $t \mapsto \gamma(t)$ une trajectoire de ce champ.
Si à partir d'une certaine valeur de la variable t, la trajectoire γ reste dans une partie compacte de $\mathbf{R}^2$, alors soit γ converge en $+\infty$ vers un point de $\mathbf{R}^2$, soit son comportement asymptotique est une fonction périodique appelée cycle limite.

1. On considère le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^2$ par
$$\varphi(x, y) = (1 - e^x, -ye^x).$$
   (a) Donner les signes des coordonnées de $\varphi(x, y)$ en fonction des signes de x et y.
   (b) Représenter l'allure de ce champ de vecteurs.
   (c) Justifier, qu'au bord de chaque disque de centre $(0, 0)$, le champ est entrant, ce qui signifie qu'il est dirigé vers l'intérieur du disque.
   (d) En déduire que les trajectoires de ce champ satisfont les hypothèses du théorème de Poincaré-Bendixson.
   (e) Décrire le comportement limite des trajectoires du champ φ.

2. On considère le champ de vecteur défini sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en coordonnées polaires par
$$\psi(r, \theta) = (1 - r, r).$$
   (a) Représenter l'allure de ce champ de vecteur.
   (b) Déterminer ses trajectoires.
   (c) Quel est leur comportement limite ?

3. On considère enfin le champ de vecteur défini sur $\mathbf{R}^3$ par
$$\phi(x, y, z) = (10y - 10x, -xz + 28x - y, xy - 8z/3).$$
   Les figures ci-dessous montrent deux vues d'une même trajectoire de ce champ.





   Les hypothèses et la conclusion du théorème de Poincaré-Bendixson semblent-elles ici vérifiées ? Qu'en déduit-on ?