Contrôle 1

Les calculatrices sont interdites. Une feuille de notes A4 manuscrite est autorisée.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (5 points)

Soit φ le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \varphi(x,y) = (y,1)$.

1. Représenter ce champ de vecteurs.
2. Déterminer ses lignes de champs et les représenter.
3. Le champ φ est-il un champ de gradient ?
4. Calculer la circulation de ce champ
   - le long du cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique ;
   - le long du segment $[-1,1] \times \{0\}$.
5. Ces deux résultats sont-ils cohérents avec les résultats des questions précédentes ?

Exercice 2 (4 points)

Soit f le champ scalaire défini sur $\mathbf{R}^2 \setminus (0,0)$ par $\forall (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1. Représenter le graphe de f.
2. Déterminer les lignes de niveau de f.
3. Représenter les lignes de niveau $f(x,y) = n$ pour $n = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ et 1.
4. Calculer et représenter le champ de gradient de f.
5. Quel phénomène physique est décrit par des champs de la forme de f et son gradient ?

Exercice 3 : Un phénomène de monodromie (3 points)

Est-il possible de définir sur $\mathbf{C}$ une application continue qui à tout nombre complexe associe une de ses deux racines carrées ?

On pourra essayer de répondre en raisonnant sur le cercle unité de $\mathbf{C}$.

Exercice 4 : Écoulement d'air et effet Magnus (9 points)

Les champs de vecteurs de cet exercice sont représentés en coordonnées polaires. Plus précisemment, pour un point du plan de coordonnées polaires (r,θ), un champ de vecteur φ sera représenté en ce point dans le repère des coordonnées polaires associé au point :

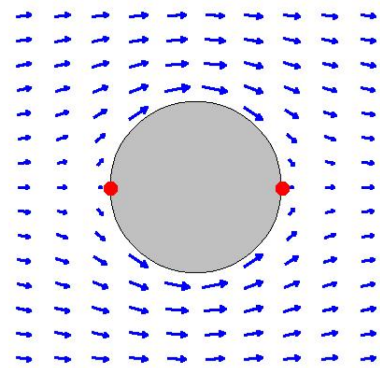
$$\varphi(r,\theta) = (\varphi_r(r,\theta), \varphi_\theta(r,\theta)) = \varphi_r(r,\theta)\vec{u}_r + \varphi_\theta(r,\theta)\vec{u}_\theta,$$

où $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est le repère associé au point (r,θ). Ainsi défini, la divergence du champ φ est donnée par

$$\mathrm{div}(\varphi)(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\varphi_r)}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta}(r,\theta).$$

1. Écoulement d'air autour d'un disque.
   On considère le champ de vecteur, représenté ci-dessous[1], défini pour $r \geq 1$ et $\theta \in \mathbf{R}$ par

$$\varphi(r,\theta) = (\varphi_r(r,\theta), \varphi_\theta(r,\theta)) = (\cos(\theta) - \frac{\cos(\theta)}{r}, -\sin(\theta)).$$



   (a) Représenter (sans justification) l'allure des trajectoires de ce champ de vecteur.
   (b) Montrer que le champ φ est à flot conservatif.

   On considère que φ est le champ de vitesse de l'air contournant un disque de rayon 1. La pression qui s'exerce sur le bord du disque est donnée par

$$p = 3 - \|\varphi\|^2.$$

   Plus précisemment, la force qui s'exerce en un point $(1,\theta)$ du bord du disque est donnée par le vecteur dirigé vers le point $(0,0)$ et de norme $3 - \|\varphi(1,\theta)\|^2$.

   (c) Calculer la pression p au point $(1,\theta)$.
   (d) Représenter le champ de force qui s'exerce sur le bord du disque.
   (e) Que peut-on dire de la force qui s'exerce sur le centre de gravité du disque ?
   (f) Que signifie physiquement ce résultat pour le disque ? Cela vous semble-t-il réaliste ? Que néglige-t-on dans notre modèle ?

2. Rotation du disque
   On suppose maintenant que le disque est en rotation sur lui-même. Cette rotation entraîne un mouvement de l'air autour du disque modélisé par le champ de vitesse

$$\psi(r,\theta) = (0, -\frac{1}{2r}).$$

   (a) Représenter ce champ en dehors du disque.
   (b) Est-il à flot conservatif ?

3. Effet Magnus
   On considère de nouveau l'écoulement initial de l'air autour du disque. Avec la rotation du disque, le champ de vitesse de l'air autour du disque est désormais donné par

$$v = \varphi + \psi.$$

   (a) Le champ v est-il à flot conservatif ?
   (b) Calculer la pression au point $(1,\theta)$ du bord du disque.
   (c) Représenter le champ de force qui s'exerce sur le bord du disque.
   (d) Que peut-on dire de la force qui s'exerce sur le centre de gravité du disque ? Que signifie physiquement ce résultat pour le disque ?
   (e) Qu'est-ce qu'un effet lifté au tennis ? (Hors barème)

1. L'image est tirée d'un article de Quentin Agren sur le site Images des Mathématiques.