Devoir 2

Documents et calculatrice sont autorisés.

Exercice 1 : test paramétrique pour la loi exponentielle (15 pts)

Un fabriquant d'ampoules prétend que ses ampoules ont une durée de vie moyenne de 2 ans. On souhaite le vérifier.

On fait l'hypothèse que la durée de vie d'une ampoule suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On rappelle qu'une variable X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est définie sur $\mathbf{R}_+$ par la densité $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Elle a pour espérance $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et pour écart-type $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

On a étudié 50 ampoules. On a mesuré ainsi une durée de vie moyenne de 1,9 ans.

1. **Adéquation à la loi exponentielle**
   Avant de tester la moyenne, on souhaite vérifier notre hypothèse que la durée de vie d'une ampoule suit une loi exponentielle.
   On précise les durées observées pour notre échantillon dans le tableau ci-dessous :

durée de vie (en années)	0-1	1-2	2-3	> 3
nombre d'ampoules	22	10	3	15

   Faire deux tests d'adéquation à la loi exponentielle : l'un en utilisant la valeur de λ correspondant à l'affirmation du fabriquant, l'autre en utilisant la valeur de λ estimée avec l'échantillon.

2. **Test de la moyenne**
   Réaliser un test de la moyenne au risque de 5%. Les ampoules sont-elles conformes à ce que dit le fabriquant ?

3. **Test de la médiane**
   On souhaite renforcer notre étude par une second test. On rappelle que la médiane d'une variable X est le nombre M défini par $\mathbf{P}(X \geqslant M) = \mathbf{P}(X < M) = \frac{1}{2}$.
   On rappelle également que si $\overline{M}$ est l'estimateur de la médiane alors la variable aléatoire $2f(M)\sqrt{n}(\overline{M} - M)$ converge en loi quand n tend vers $+\infty$ vers la loi normale centrée réduite : autrement dit pour n assez grand,
$$2f(M)\sqrt{n}\left(\overline{M} - M\right) \sim \mathcal{N}(0,1).$$
   (a) Montrer que la médiane de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est $M = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.
   En déduire la médiane correspondant à l'affirmation du constructeur.
   (b) Définir un test de la médiane au risque de 5%.
   (c) La médiane de notre échantillon est $1,1$.
   Est-ce conforme ? Conclure.
   (d) En réalisant comme nous l'avons fait deux tests successifs, quel risque augmente : le risque de rejeter à tort l'affirmation du constructeur ou le risque de l'accepter à tort ?

   Remarque inutile pour le sujet : on notera en observant les données de la partie 1 que la médiane fournit ici une information plus pertinente et honnête que la moyenne sur la durée de vie des ampoules.

Exercice 2 : manipulation statistique (5 pts)

On souhaite démontrer que le niveau de vie des jeunes salariés ne dépend pas de leur milieu social d'origine. On a comparé les salaires de 500 jeunes et dressé le tableau suivant :

salaire brut en euros	milieu moins favorisé	milieu plus favorisé	total
1000-1500	200	75	275
1500-2000	75	100	175
2000 - 2500	20	15	35
> 2500	5	10	15
total	300	200	500

On précise que les données ci-dessus sont purement fictives.

1. Réaliser un test adéquat pour répondre au problème.
2. On souhaite vraiment démontrer que le niveau de vie des jeunes ne dépend pas de leur origine sociale.
   Regrouper astucieusement des catégories du tableau et refaire un test afin d'obtenir un résultat plus satisfaisant.