

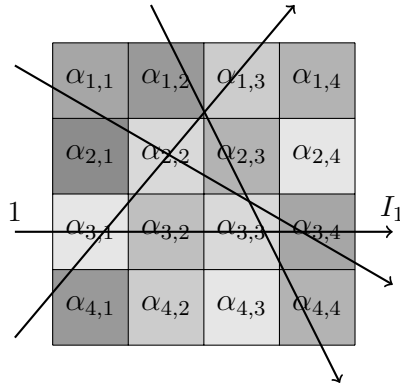
La tomographie est une technique d'imagerie qui permet de reconstituer le volume d'un objet à partir de mesures effectuées à l'extérieur de l'objet. Son domaine d'application le plus connu est l'imagerie médicale avec notamment le scanner : on fait passer des rayons X à travers le corps. En fonction de la densité des parties du corps traversé, ces rayons ressortent avec une intensité plus ou moins affaiblie. À partir de ces informations, on est capable de reconstituer l'intérieur du corps analysé.

Nous allons essayer de comprendre ce fonctionnement, tout d'abord de manière discrète avec des systèmes linéaires, puis de manière continue avec la transformée de Radon.

Pour les représentations graphiques des fonctions de densités, on recommande d'utiliser la commande `pcolor(x,y,c)` d'Octave où la matrice c fournit la valeur de la densité pour tous les couples possibles définis par les vecteurs x et y .

1 Systèmes linéaires

On considère que le corps analysé est un carré de côté 1, divisé en $n \times n$ petits carrés. Chaque petit carré c représente une partie du corps d'une certaine densité $\alpha_c \in [0, 1]$.



On fait traverser ce corps par des rayons d'intensité initiale 1. Lorsque le rayon traverse une zone de densité α sur une longueur ℓ , son intensité est atténuée d'un facteur $e^{-\alpha\ell}$.

Ainsi, si nous prenons le rayon 1 de notre figure, il ressortira du corps avec une intensité :

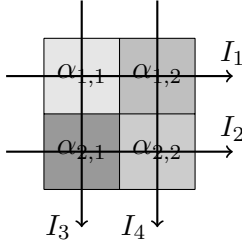
$$I_1 = e^{-\frac{1}{4} \cdot \alpha_{3,4}} \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot \alpha_{3,3}} \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot \alpha_{3,2}} \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot \alpha_{3,1}} \cdot 1.$$

En passant au logarithme, on obtient

$$\frac{\alpha_{3,1}}{4} + \frac{\alpha_{3,2}}{4} + \frac{\alpha_{3,3}}{4} + \frac{\alpha_{3,4}}{4} = -\ln(I_1).$$

Ainsi, si on connaît l'intensité du rayon en sortie, on obtient une information sur les densités de certaines parties du corps. En utilisant plusieurs rayons orientés différemment, on obtient un système linéaire qu'il suffit de résoudre pour connaître les valeurs de toutes les densités $\alpha_{i,j}$.

1. Commençons par un exemple simple : le corps est divisé en 4 carrés traversés par les 4 rayons représentés ci-contre.



Donner le système linéaire associé à ces rayons. Expliquer pourquoi il est impossible d'en déduire les valeurs de $\alpha_{i,j}$ en fonction des intensités I_1, I_2, I_3 et I_4 .

Nous ne pourrions donc pas nous contenter de simples rayons horizontaux et verticaux.

2. Choisir quatre autres rayons moins triviaux. Pour chacun, déterminer la longueur du rayon à travers chaque carré. Écrire ensuite un programme $Sorties_4(A)$ qui pour une matrice A représentant les densités $\alpha_{i,j}$ renvoie la liste des intensités de sorties des 4 rayons.
3. Écrire un programme $Tomo_4(I)$ qui pour une liste I de 4 intensités de sorties, résout le système linéaire associé et reconstitue ainsi la matrice A initiale.
Tester ces programmes sur plusieurs exemples de matrices A .

Étendons cela à des carrés divisés en $n \times n$ parties. On commencera par $n = 3$ et $n = 4$ puis on essaiera de généraliser.

4. Proposer une façon de choisir judicieusement n^2 rayons. Calculer pour chacun les longueurs du rayon dans chaque case.
5. Écrire un programme qui pour une matrice A renvoie la liste I des n^2 intensités de sortie.
6. Écrire un programme qui à partir des intensités de sorties et des rayons choisis reconstitue la matrice A initiale.
7. Le problème est-il bien conditionné ? Si oui, proposer un jeu de rayons pour lequel il ne l'est pas, si non, proposer un jeu de rayon pur améliorer le conditionnement.
8. Recommencer en augmentant la valeur de n .

2 Transformée de Radon

Nous allons maintenant étudier le cas continu avec le cadre mathématique général sur lequel repose le fonctionnement de la tomographie. Le corps n'est plus discrétisé en parties de densité supposée constante. Chaque point du corps a sa densité et la composition du corps est ainsi décrite par une fonction de densité $f(x, y)$ continue.

Nous considérons tout d'abord, pour simplifier, que le corps est défini sur le plan $\mathbf{R}^2$ tout entier. Nous le faisons traverser par des rayons dans toutes les directions possibles du plan. Un rayon est ainsi défini par une droite du plan. Nous définirons une droite par sa distance algébrique $\rho \in \mathbf{R}$ à l'origine et l'angle $\theta \in [0, \pi[$ de sa direction normale : ainsi la droite $D_{u,\theta}$ aura pour équation $x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = u$ et sera paramétrée par :

$$\begin{cases} x &= u \cos(\theta) - t \sin(\theta) \\ y &= u \sin(\theta) + t \cos(\theta) \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

De même que dans le cas discret chaque rayon permettait de connaître une somme (pondérée) de densités de différentes cases, chaque rayon permet ici de connaître la somme des densités de tous les points traversés par le rayon. Le rayon de paramètres (u, θ) permet d'obtenir la somme intégrale

$$R_f(u, \theta) = \int_{D_{u, \theta}} f(x, y) d\ell = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(u \cos(\theta) - t \sin(\theta), u \sin(\theta) + t \cos(\theta)) dt.$$

La fonction R_f est appelée transformée de Radon de la fonction f .

L'objectif est, à partir de cette transformée de Radon, d'être capable de retrouver la fonction f initiale. Il s'agit d'un problème de transformée inverse. En se ramenant à un problème de transformée de Fourier, il est possible de le résoudre.

Le théorème de Radon fournit l'existence d'une transformation inverse : si la fonction f est intégrable sur $\mathbf{R}^2$, on peut la recomposer en calculant d'abord l'intégrale suivante :

$$\tilde{R}_f(v, \theta) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} R_f(u, \theta) e^{-2i\pi uv} du.$$

Il est possible de montrer que cette intégrale est en fait la transformée de Fourier (en deux variables) de la fonction f mais dans un système de coordonnées polaires. La transformation de Fourier inverse permet de recomposer f ainsi :

$$f(x, y) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{v=-\infty}^{+\infty} \tilde{R}_f(v, \theta) e^{2i\pi v(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |v| dv d\theta.$$

1. Vérifions que ce théorème d'inversion fonctionne pour des fonctions simples : on pourra considérer la fonction f égale à 1 sur le disque unité et nulle en dehors, ou encore la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

Pour chacun de ces deux exemples, représenter la densité associée puis calculer leur transformée de Radon et enfin leur transformée de Radon inverse à l'aide de Maple.

2. Pour des fonctions f plus complexes, il faut utiliser des méthodes approchées de calcul intégral.

En utilisant les outils d'intégration de Python et/ou en discrétisant l'espace, définir une méthode qui pour une fonction f donnée, calcule sa transformée de Radon, puis la recompose à l'aide de la transformation inverse.

Appliquer cette méthode à plusieurs exemples. Comparer les résultats finaux aux fonctions initiales choisies. Commenter : y a-t-il des erreurs ? Où sont-elles les plus élevées ? À quoi sont-elles dues ? Comment pourrait-on les réduire ?

Fonctions utiles en Maple : $\text{int}(f(t), t=-\text{infy}..\text{infy})$, $\text{evalf}(..)$ pour obtenir des valeurs numériques.