Problèmes différentiels aux limites

Nombre de problèmes de mécanique (écoulement d'un fluide dans un canal, vibration de poutres encastrées,...) sont modélisées par des équations différentielles avec des données prescrites au bord du domaine de résolution. Par exemple, pour une corde de longueur 1, pincée à l'instant $t = 0$ et qui reste fixée à ses deux extrémités, l'évolution de sa hauteur au cours du temps est représentée par une fonction $u(t, x)$ qui doit vérifier $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

On se propose dans ce projet de donner un moyen de résoudre des équations différentielles simples avec des conditions aux limites. On doit d'abord comprendre les nuances de ce type de problème par rapport aux équations habituelles.

1 Les cas d'école

Soit $q \in \mathbb{R}$. Résoudre les équations différentielles suivantes dans $[0, 1]$ avec les conditions aux bords prescrites (Maple sait-il les résoudre?). Illustrer avec des graphes.

a) $y''(t) = qy(t)$, $y(0) = y(1) = 0$ (conditions de Dirichlet homogènes);

b) $y''(t) = qy(t)$, $y'(0) = y'(1) = 0$ (conditions de Neumann homogènes).

Les résultats que vous avez obtenus contredisent-ils le théorème de Cauchy-Lipschitz?

2 Résolution numérique d'un problème aux limites

On s'intéresse à ce problème aux limites sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$\begin{cases} -(p(t)y'(t))' + q(t)y(t) &= f(t) \\ y(0) = y(1) &= 0, \end{cases} \tag{1}$$

avec p une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, q et f deux fonctions continues sur $[0, 1]$ données.

a) On définit l'opérateur suivant sur l'espace $E = \{g \in \mathcal{C}^2([0, 1]),\ g(0) = g(1) = 0\}$:

$$\begin{array}{rccc} L : & E & \longrightarrow & \mathcal{C}^0([0,1]) \\ & y & \longmapsto & -(py')' + qy. \end{array}$$

Montrer que L est linéaire. Comment interprète-t-on le fait que la seule solution de $L(y) = 0$ dans E soit la fonction nulle?

b) Si l'équation $L(y) = 0$ a effectivement pour seule solution dans E la fonction nulle, alors on admet que le problème $L(y) = f$ possède une unique solution dans E.

Dans ce cas, le problème (1) est équivalent à un problème de Cauchy

$$\begin{cases} -(p(t)y'(t))' + q(t)y(t) &= f(t) \\ y(0) = 0 \;\; ; \;\; y'(0) &= \alpha, \end{cases} \tag{2}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ inconnu.

Ecrire un programme qui calcule une solution approchée du problème (2) avec un schéma d'Euler explicite.

c) Dans la suite de cette partie, on prend $p(t) = t^2 + 1$, $q(t) = t$ et $f(t) = t + 1$. On est dans un cas où le problème aux limites possède une solution unique, donc il suffit de trouver la valeur de α qui convient dans le problème de Cauchy (2) pour obtenir la solution.

On propose de trouver cette valeur par une *méthode de tir*. Si on considère que l'équation modélise le mouvement d'un boulet de canon, choisir une valeur de α revient à choisir un angle de tir. En essayant différentes valeurs de α, et admettant que $y(1)$ dépend continûment de α, on observe si le boulet tombe "trop près" (dans quel cas $y(1) < 0$) ou "trop loin" ($y(1) > 0$), et on ajuste α pour l'essai suivant.

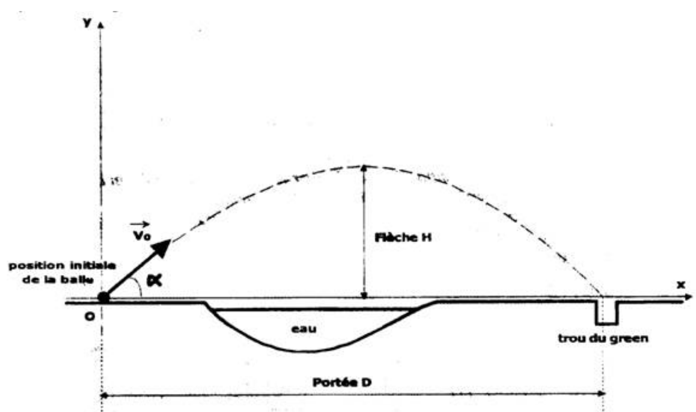

figure 1

Exemple de méthode de tir appliquée: à une puissance fixée, le golfeur cherche l'angle qui permet à la balle d'atteindre le trou. Sur le schéma, α désigne l'angle; dans notre formulation du problème, α est la pente de la droite dirigée par $\vec{v_0}$, ce qui est bien sûr équivalent.
Crédit image: Thierry Collet, `thierry.col2.free.fr`

Proposer une méthode pour approcher la valeur de α, puis la mettre en oeuvre en conjonction avec le schéma d'Euler précédent pour approcher la solution du problème (1).

La précision souhaitée est sur la valeur de $y(1)$: on s'arrêtera quand $|y(1)| < h$ pour une valeur de h choisie par l'utilisateur.

d) Tracer le nombre d'itérations de la méthode de tir nécessaires pour conclure en fonction de h. Expliquer.

3 Erreur de la méthode de tir

On a choisi de mesurer l'erreur de la méthode de tir avec la différence entre les valeurs en 1 des solutions exacte et numérique. Toutefois, l'erreur en analyse numérique est souvent la mesure d'une erreur globale, sur tout l'intervalle.

Revenons au cas d'école, $y'' = qy + f$ sur $[0,1]$, avec $q \in \mathbb{R}$ constante, et les conditions de Dirichlet $y(0) = y(1) = 0$.

a) A quelle condition sur q peut-on garantir l'unicité de la solution du problème?

b) Choisir une valeur de q convenable, et une fonction continue non nulle f qui permet de résoudre l'équation analytiquement (polynôme, fonction trigo, exponentielle), et le faire. On note y_e la solution exacte.

c) Utiliser votre programme pour résoudre numériquement l'équation, avec une précision h sur la valeur finale. On note y_h la solution approchée obtenue.

Estimer les erreurs suivantes en fonction de h:

$$E_1 = \int_0^1 |y_e(t) - y_h(t)|\, dt \ ; \ E_2 = \left(\int_0^1 |y_e(t) - y_h(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \ ; \ E_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |y_e(t) - y_h(t)|.$$

Sur la base de graphiques, on proposera des équivalents pour le comportement de E_1, E_2 et E_∞ en fonction de h.

Y a-t-il d'autres sources d'erreurs que h? Commenter avec plusieurs exemples (valeurs de q, h etc...) à l'appui.

4 Conditions de Neumann

Proposer, expliquer et mettre en oeuvre une méthode de tir pour résoudre numériquement le problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' - qy & = & f \\ y'(0) = y'(1) & = & 0 \end{array} \right.$$

sur l'intervalle $[0,1]$, avec q constante telle que l'unicité de la solution est garantie.