Le but de ce projet est d'étudier quelques applications du théorème du point fixe rappelé ci-dessous :

Théorème. *Soit E un espace vectoriel normé complet et soit f une application contractante de E vers E :* $\exists k < 1, \forall (x,y) \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|$.
Alors f possède un unique point fixe : $\exists ! x \in E, \quad f(x) = x$.
De plus, pour tout $x_0 \in E$, la suite définie récursivement par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x et pour tout n, $\|x_n - x\| \leq k^n \|x_0 - x\|$.

Hormis la dernière partie qui nécessite Maple, le projet peut être réalisé en Python.

1 Point fixe d'une fonction réelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. On cherche à déterminer le point fixe de f.

1. Déterminer le point fixe de f avec les commande *solve* et *fsolve* de Maple.
2. Représenter le graphe de f et proposer un intervalle de stabilité de f ($f(I) \subset I$) sur lequel f est contractante. *(Indication : quand une fonction est dérivable, on peut lier facilement le caractère contractant à l dérivée de la fonction.)*
3. Choisir x_0 dans cet intervalle. Écrire un programme qui calcule la valeur numérique du terme x_n de la suite associée à f dans le théorème du point fixe.
4. Utiliser ce programme pour obtenir une approximation du point fixe de f.
Combien faut-il calculer de termes de la suite pour garantir, d'après le théorème du point fixe, une approximation à 10^{-5} près ? À 10^{-10} près ?

2 Centre du cercle circonscrit

On considère trois points A, B et C du plan non alignés. On cherche à déterminer le centre Ω de leur cercle circonscrit. Cela revient à résoudre un système non linéaire. Nous allons le résoudre de manière approchée à l'aide du théorème du point fixe. On considère pour cela l'application

$$f : P \mapsto P + \frac{PB - PA}{2}\frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{PC - PA}{2}\frac{\vec{AC}}{AC},$$

où MN désigne la longueur du segment $[MN]$.

1. Montrer que le point fixe de f est la solution du problème.
2. Programmer la fonction f en représentant les points par des couples de réels.
3. Fixer trois point sA, B, C. Pour de nombreux points P et Q, comparer les distances euclidiennes PQ et $f(P)f(Q)$. La fonction f est-elle contractante ? Et si on ne choisit que des points P et Q à l'intérieur du triangle ABC ?
4. À l'aide de la méthode du point fixe, écrire un programme qui détermine, pour trois points A, B, C, le centre de leur cercle circonscrit avec une bonne précision que l'on donnera.
5. Représenter un triangle et les points d'une suite convergeant vers son centre du cercle circonscrit.

3 Méthode de Jacobi pour l'inversion de matrice

On considère une matrice réelle A inversible de taille n et un vecteur $Y \in \mathbf{R}^n$. On souhaite déterminer le vecteur $X \in \mathbf{R}^n$ tel que $AX = Y$. La solution est simplement $X = A^{-1}Y$. Cependant, l'inversion d'une matrice est une opération lourde lorsque n est très grand. On lui préfère alors des méthodes d'approximations.

On considérera sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ la norme subordonnée suivante : $\|M\| = \sup_{V \in \mathbf{C}^{n*}} \frac{\|MV\|_2}{\|V\|_2}$. Cette norme possède de bonnes propriétés (voir TD). On peut montrer qu'elle est égale à : $\|M\| = \sqrt{\max_{i=1..n} |\lambda_i|}$ où les $\lambda_i \in \mathbf{C}$ désignent les valeurs propres de la matrice ${}^tMM$.

En Python et Maple, des commandes permettent d'accéder aux valeurs propres d'une matrice.

1. Notons $B = I_2 - A$ et définissons l'application qui à un vecteur V associe le vecteur $\varphi(V) = BV + Y$.
   (a) Justifier que le point fixe de φ est la solution du problème.
   (b) Sous quelle condition sur B l'application φ est-elle contractante ?
   (c) Écrire un programme qui vérifie si cette condition est satisfaite.
   (d) Écrire un programme qui, partant d'un certain vecteur V_0, itère l'application φ et fournit une approximation de la solution du problème.
   (e) L'appliquer sur plusieurs exemples. Donner en particulier des exemples où la méthode ne fonctionne pas. Lorsqu'elle fonctionne, donner la précision garantie par le théorème du point fixe.
2. Notons maintenant D la partie diagonale de A et $E = D - A$. Puis considérons l'application $\psi(V) = D^{-1}EV + D^{-1}Y$.
   Exemple : si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, alors $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ et $E = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & -6 \\ -7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Montrer que le point fixe de ψ est la solution du problème.
   (b) Sous quelle condition cette application est-elle contractante ? Justifier notamment qu'elle l'est si A est à diagonale dominante.
   (c) Reprendre les questions de la partie précédente.
   Remarque : on s'autorise ici à inverser la matrice D ce qui semble contredire l'idée de l'exercice. La matrice en question étant diagonale, son inversion ne pose en fait aucun problème.

4 Méthode de Picard pour les équations différentielles

On considère une fonction F définie sur $\mathbf{R}^2$ satisfaisant les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit (E) l'équation différentielle

$$y'(t) = F(t, y(t)).$$

Soit $y_0 \in \mathbf{R}$. On cherche la solution de (E) vérifiant $y(0) = y_0$.

On considère l'opérateur de Picard associé au problème. C'est la fonction Γ qui à toute fonction f associe la fonction définie par

$$\Gamma(f)(t) = y_0 + \int_0^t F(s, f(s))ds.$$

Cet opérateur est au cœur de la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz. On y démontre qu'il est contractant sur l'espace des fonctions f continues pour une certaine norme bien choisie. Le théorème du point fixe s'applique donc : il existe une unique fonction y point fixe de Γ. Ce point fixe est justement la solution de notre problème.

L'utilisation de Γ permet ainsi de construire des approximations de la solution du problème.

1. Vérifier que le point fixe de Γ est bien la solution cherchée.
2. On considère pour commencer l'équation différentielle $y' = y$ avec $y(0) = 1$.
   Définir la fonction (une procédure n'est pas nécessaire) *Gamma* correspondante qui à une fonction f associe la fonction $\Gamma(f)$.
   Les fonctions doivent être définies sous la forme $f := t- > f(t)$, et Gamma également : Gamma $:= f- > (t- > ...)$.
3. Définir la fonction $f_0 : t \mapsto 1$. Calculer les premiers termes de la suite f_n associée.
   Pour obtenir l'expression des f_i, on calcule $f_i = \Gamma(f_{i-1})$ puis on regarde $f_i(t)$.
4. Représenter sur l'intervalle $[0, 2]$ les graphes des fonctions f_n calculées et comparer avec la solution connue du problème étudié.
5. Recommencer avec d'autres fonctions initiales f_0.
6. On considère maintenant l'équation $y'(t) = y^2(t) - t$. On ne sait pas résoudre explicitement cette équation.
   On cherche à approcher la solution vérifiant $y(0) = 0$. Refaire l'étude précédente pour ce problème.
   Les calculs étant très lourds, on peut difficilement aller plus loin que f_8.
7. À l'aide de la commande *DEplot* du package *DEtools* de Maple, obtenir une représentation graphique approchée de la solution du problème.
   La comparer aux résultats obtenus précédemment.

Fonctions utiles en Maple : *pointplot, solve, fsolve, Eigenvalues, DEplot, display.*
On rappelle enfin que la multiplication des matrices s'écrit en Maple $A.B$ et non $A \cdot B$ mais il est aussi possible d'utiliser Python.