Un paradoxe

1 Introduction

Description du jeu A :
On dispose d'une pièce truquée. Lorsqu'on la lance, la probabilité d'obtenir "pile" est $p_1 = 0.495$ et la probabilité d'obtenir "face" est $1 - p_1$. Le joueur va lancer cette pièce un grand nombre de fois. Chaque fois qu'il obtient "pile" il gagne 1 euro, et il perd 1 euro chaque fois qu'il obtient "face".

Description du jeu B :
On dispose désormais de deux pièces truquées. Avec la première pièce, on obtient "pile" avec une probabilité $p_2 = 0.095$. Avec la seconde, on obtient "pile" avec une probabilité $p_3 = 0.745$. La pièce avec laquelle va jouer le joueur dépend de sa fortune. Si son capital est un multiple de 3, il joue avec la première pièce, sinon il joue avec la deuxième. Là encore, il obtient 1 euro lorsqu'il fait "pile", et il perd 1 euro lorsqu'il fait "face". Sa fortune évoluant au cours du jeu, il jouera régulièrement avec chacune des deux pièces.

Des simulations de ces jeux sont demandées. Pour être significatives, les parties doivent durer au moins 10000 tours. On pourra utiliser Python, sauf pour la partie théorique 3 qui nécessite Maple.

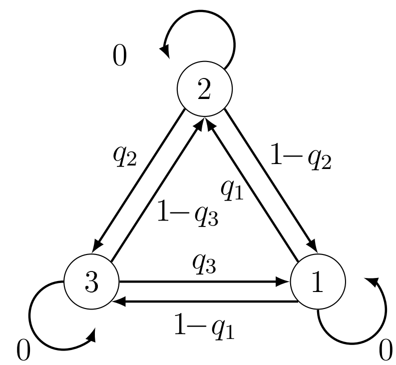
2 Étude du jeu A

On note S_n la fortune du joueur après le n-ième lancer. On suppose que $S_0 = 0$, *i.e.* la fortune du joueur est initialement égale à 0. On note X_n le gain obtenu par le joueur au n-ième lancer. Les variables aléatoires X_n sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

1. Quelle est la loi des variables X_n ? Pour $n \geq 1$, quelle est la loi de la variable S_n ?
2. Déterminer les valeurs des espérances $\mathbf{E}[X_n]$ et $\mathbf{E}[S_n]$.
3. Décrire à l'aide de la loi forte des grands nombres l'évolution la plus probable de ce jeu ?
4. Simuler ce jeu, représenter graphiquement l'évolution des gains et comparer ces résultats avec les résultats théoriques.

3 Chaînes de Markov

On appelle chaîne de Markov un ensemble d'états liés par des probabilités de transition. Le principe est que l'on peut se déplacer sur la chaîne d'un état à l'autre. Ces déplacements sont aléatoires et décrits par des probabilités de transition. Une telle chaîne (à 3 états) se représente de la manière suivante :



Notons a_{ij} la probabilité de passer de l'état i à l'état j. On appelle matrice de transition de la chaîne de Markov la matrice $(a_{ij})_{i,j\leq N}$. Sur notre exemple ci-dessus, nous avons $a_{12} = q_1$, $a_{21} = 1 - q_2$ et $a_{11} = 0$, et la matrice de transition de cette chaîne de Markov est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & 1-q_1 \\ 1-q_2 & 0 & q_2 \\ q_3 & 1-q_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous étudions dans cette partie certaines propriétés de la chaîne de Markov décrite ci-dessus avec $0 < q_i < 1$ pour $i = 1, 2, 3$.

1. Quelle est la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 en deux déplacements ?
2. Calculer la matrice M^2 et constater que c'est la matrice des probabilités de transition en deux étapes, *i.e.* le coefficient b_{ij} de M^2 représente la probabilité de passer de l'état i à l'état j en deux étapes.
3. Généraliser ce résultat.
4. Chercher les valeurs propres de M et donner une matrice de passage permettant de diagonaliser M.
   Avec Maple, on peut préciser que les nombres q_1, q_2 et q_3 sont dans $[0, 1]$ *à l'aide de la commande* assume.
5. En déduire que la suite de matrices $(M^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une matrice limite M^∞. Justifier que toutes les lignes de cette matrice M^∞ sont identiques et égales à un certain vecteur propre de M.
   Le coefficient de sa k-ième colonne représente alors la fréquence de passage dans l'état k.
6. Appliquer le lemme de Cesàro à la suite de matrices $(M^n)_{n\in\mathbf{N}}$.

4 Étude du jeu B

On reprend les mêmes notations que dans la partie 2 (mais les variables X_n ne sont plus indépendantes et de même loi). Pour étudier le jeu B, on considérera une chaîne de Markov à trois états 1, 2, et 3. On dira que le joueur est dans l'état 3 si sa fortune est un multiple de 3, dans l'état 1 si elle est de la forme $s = 3k + 1$, et dans l'état 2 si elle est de la forme $s = 3k + 2$. Sa fortune évoluant au cours du jeu, son état évolue également.

On introduit la variable aléatoire C_n à valeur dans $\{1, 2, 3\}$ qui donne l'état où se trouve le joueur après le n-ième lancer. La fortune du joueur étant initialement nulle, $C_0 = 3$.

Avant la question 8, les résultats seront exprimés en fonction des paramètres p_2 et p_3.

1. Définir la matrice de transition M associée à la chaîne de Markov du jeu.
2. Donner $\mathbf{P}(C_1 = 3)$, $\mathbf{P}(C_1 = 1)$ et $\mathbf{P}(C_1 = 2)$.
3. Déterminer $g_3 = \mathbf{E}[X_n | C_{n-1} = 3]$ l'espérance conditionnelle du gain X_n sachant que le joueur est dans l'état 3. Donner de même $g_1 = \mathbf{E}[X_n | C_{n-1} = 1]$ et $g_2 = \mathbf{E}[X_n | C_{n-1} = 2]$).

   On remarquera que ces valeurs ne dépendent pas de n et on notera $G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$.
4. Déduire des deux questions précédentes la valeur de $\mathbf{E}[X_2]$. Vérifier qu'il s'agit bien du troisième coefficient du vecteur $M \cdot G$.
5. Généralisation : montrer que pour tout n, l'espérance $\mathbf{E}[X_n]$ est le troisième coefficient du vecteur $M^{n-1} \cdot G$.
6. En déduire l'expression de $\mathbf{E}[S_n]$.
7. Déterminer avec Maple la limite de la suite $(M^n)_{n \in \mathbf{N}}$.
8. En déduire le gain moyen du joueur $\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}[\frac{S_n}{n}]$.
9. Comment va évoluer le jeu ?
10. Simuler ce jeu, représenter graphiquement l'évolution des gains et comparer ces résultats avec les résultats théoriques.

5 Combinaison des deux jeux

On considére désormais le jeu suivant : avant chaque lancer, le joueur tire au sort le jeu auquel il va jouer. Il jouera au jeu A avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et au jeu B avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
On peut modéliser ce jeu avec la chaîne de Markov du jeu B. Seules les probabilités de transition sont modifiées.

1. Définir la matrice de transition de la chaîne de Markov associée à ce jeu.
2. Refaire les calculs de la partie précédente.
3. Quel est le gain moyen de ce jeu ? Pourquoi ce résultat est-il paradoxal ?
4. Simuler ce jeu, représenter graphiquement l'évolution des gains et comparer ces résultats avec les résultats théoriques.

5. Si on joue en alternance aux jeux A et B, obtient-on le même résultat ?
6. On joue désormais au jeu A avec une probabilité r et au jeu B avec une probabilité $1-r$. Déterminer de manière théorique et expérimentale des valeurs de r pour lesquelles le gain moyen est nul, et pour lesquelles il est maximal.