Marches aléatoires

En dimension 1

Imaginer une personne qui se déplace dans une rue infinie. À chaque pas elle choisit aléatoirement de continuer à avancer ou de faire demi-tour (les marches aléatoires sont aussi appelées marches de l'ivrogne).

Mathématiquement on considère la variable aléatoire $(X_n)_n$ donnant la position du marcheur à l'instant n. Initialement $X_0 = 0$, puis on tire aléatoirement les déplacements successifs : pour tout $n \geq 0$, $X_{n+1} = X_n + 1$ avec une probabilité $p = 1/2$ et $X_{n+1} = X_n - 1$ avec une probabilité $1 - p = 1/2$.

Un peu de théorie

1. Soit $n > 0$. Quelle est la loi de X_n ? *On pourra la décrire à partir d'une loi classique.*
2. Que peut-on déduire du théorème central limite pour la position du marcheur après un très grand nombre d'étapes ?
3. Calculer explicitement la probabilité de revenir en 0 après 2 étapes de la marche aléatoire. Calculer de même la probabilité de revenir en 0 après 4 étapes (sans être repassé par 0 avant). Idem avec 6 étapes.
4. Calculer (avec Maple ou Wolfram) la somme $\sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{(n-1)2^n}\binom{n}{n/2}$.
   Elle représente la probabilité que la marche aléatoire repasse au moins une fois par 0.
5. Calculer également $\sum_{n \text{ pair}} \frac{n}{(n-1)2^n}\binom{n}{n/2}$. Que représente cette somme ? Comment s'interprète le résultat ?

Simulations

1. Écrire un programme *marche1(n)* qui simule les n premiers termes de la marche aléatoire.
   Tracer quelques trajectoires de marches aléatoires ainsi simulées.

   On souhaite retrouver les résultats théoriques expérimentalement et en établir d'autres. On écrira pour cela des programmes qui simulent un grand nombre de marches aléatoires et qui permettent ainsi d'estimer empiriquement certaines probabilités. De simples observations ne suffiront pas. Il faudra notamment justifier que le nombre de simulations est suffisamment grand pour répondre pertinemment aux questions posées.
2. Fixer n. Représenter, sous forme d'un histogramme, les valeurs de X_n pour un grand nombre de marches simulées. Recommencer avec différentes valeurs de n. Commenter.
3. Pour une valeur de n donnée, quelle est la probabilité que la marche aléatoire repasse au moins une fois par 0 au bout de n étapes. Qu'obtient-on quand n tend vers $+\infty$?
4. Quel est expérimentalement le temps moyen de retour vers 0 ?
5. Choisir d'autres valeurs de p entre 0 et 1 et simuler des trajectoires. Décrire alors le comportement probable de la marche aléatoire.

En dimension 2

Notre marcheur se déplace désormais sur un quadrillage infini. Il part du point $(0,0)$ et a alors 4 directions possibles.

On pourra recommencer les questions de cette partie en ajoutant la condition suivante : il ne fera jamais demi-tour. Ainsi, à part au tout début, il doit à chaque fois choisir entre 3 directions possibles. Les trajectoires simulées sont alors graphiquement plus jolies.

1. Si on ne tient pas compte de la contrainte ajoutée, quelle est la loi du couple (X_n, Y_n) des abscisses et ordonnées des points de la marche ?
2. Écrire un programme *marche2(n)* qui simule les n premiers points de cette marche aléatoire.
   On pourra commencer par écrire un programme qui ne tient pas compte de la condition ajoutée.
3. Simuler des trajectoires de cette marche aléatoire.
4. Fixer n. Déterminer expérimentalement la distance moyenne du point (X_n, Y_n) à l'origine. Recommencer pour plusieurs valeurs de n. Est-ce cohérent avec la loi du couple (X_n, Y_n) ?
5. Déterminer de nouveau expérimentalement la probabilité que la marche repasse par le point $(0,0)$.
6. Découper le plan en 4 secteurs délimités par les axes. Pour une marche donnée, calculer la fréquence de passage du marcheur dans chacun de ces secteurs. Le faire un grand nombre de fois et conjecturer un résultat.
7. Recommencer avec un découpage du plan en plusieurs secteurs délimités par des demi-droites passant par l'origine.
   On essaiera de représenter les fréquences de passages dans les différents secteurs sous forme d'un histogramme.

   Donnons plus de liberté à notre marcheur. Au lieu de choisir à chaque étape entre 4 directions, il peut désormais choisir une direction quelconque de la manière suivante : à chaque étape il choisit un angle au hasard (uniformément) $\theta \in [-a, a]$, et il tourne de l'angle θ par rapport à sa direction précédente.
8. Programmer cette nouvelle marche, et faire une étude exhaustive de son comportement. On étudiera notamment les différences observées selon la valeur choisie pour a entre 0 et π.

En dimension 3

Notre marcheur (un oiseau ?) se déplace désormais dans l'espace.
Adapter vos programmes puis faire l'étude de cette marche aléatoire comme les précédentes et déterminer quelques différences de comportement avec le cas de la dimension 2.

Remarque : les marches aléatoires sont à la base de la définition du mouvement brownien. Ce dernier permet de modéliser, entre autres, les mouvements erratiques des particules. Historiquement, il a été introduit afin de décrire le mouvement de grains de pollen.