On considère une plaque métallique homogène D délimitée par une courbe C. La température $T(x,y)$ à l'extérieur de la plaque est connue et elle est donc connue en particulier en tout point du bord C. L'objectif est de déterminer la température à l'intérieur de la plaque à l'équilibre. L'équation de la chaleur permet d'affirmer qu'en tout point de la plaque, à l'équilibre, son laplacien ΔT satisfait $\Delta T(x,y) = 0$. Cette égalité exprime le fait que localement, la température en un point est égale à la moyenne de ses températures voisines.

Le problème mathématique à résoudre est ce qu'on appelle un problème de Dirichlet : déterminer la température $T(x,y)$ telle que

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in D, & \Delta T(x,y) &=& 0 \\ \forall (x,y) \in C, & T(x,y) &=& f(x,y) \end{cases}$$

où f est une fonction connue sur C.

1 Un cas simple

On considère ici que D est le disque unité. Nous allons logiquement travailler en coordonnées polaires. Nous cherchons ainsi la fonction $T(r,\theta)$ telle que

— $\forall r \in]0,1[, \forall \theta \in [0,2\pi], \quad \Delta T(r,\theta) = \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0,$

— $\forall \theta \in [0,2\pi], \quad T(1,\theta) = f(\theta),$

où f est une fonction de classe C^1 donnée.

C'est un cas que l'on sait très bien résoudre ; la solution générale de l'équation de la chaleur ci-dessus est

$$T(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n r^n \cos(n\theta) + b_n r^n \sin(n\theta)\right),$$

où les a_n et b_n sont des nombres réels.

1. En supposant que cette série est convergente est qu'on peut la dériver « sous le signe somme », vérifier que la fonction ci-dessus est bien solution de l'équation de la chaleur.
2. Écrire la condition au bord et reconnaître une série de Fourier. En déduire que les a_n et b_n sont des coefficients de Fourier et les exprimer sous forme intégrale en fonction de f.

   Pour la suite, on pourra utiliser les outils d'intégration numérique de Python.
3. Définir une fonction f. Écrire un programme *Dirichlet(r,theta)* qui renvoie la température (approchée) au point de coordonnées polaires $(r, theta)$.
4. Tester ce programme pour $f(\theta) = \mathrm{e}^{1+\cos(\theta)}$. Représenter graphiquement la solution obtenue (soit avec un graphe en 3D, soit avec des couleurs).
5. Faire de même avec d'autres exemples. Considérer entre autres le cas où notre plaque est à l'interface de deux milieux : au-dessus de l'axe des abscisses, la température est de 10°, en-dessous, elle est de 0°.

2 Méthode de Monte-Carlo

Lorsque le bord C est compliqué et difficile à paramétrer, ou quand la fonction f est une fonction très irrégulière, le problème devient bien plus difficile à résoudre. On a alors recours à des méthodes numériques. Nous allons ici proposer une méthode reposant sur de l'aléatoire, méthode qui est dans certains cas la seule possible.

On souhaite estimer la température en un certain point P de D. L'idée est la suivante : partant de P, on se déplace aléatoirement dans D jusqu'à ce que l'on sorte de D. On note alors la température en ce point. On recommence un grand nombre de fois cette procédure et on estime finalement la température en P par la moyenne de toutes les températures des points de sortie atteints.

Le déplacement aléatoire se fera à l'aide d'une marche aléatoire. On choisit un pas h suffisamment petit par rapport aux dimensions de D. On part d'un point $P = (x, y)$ de D et à chaque étape on choisit aléatoirement la direction dans laquelle on va. Plus précisément, on se déplace vers le point $(x \pm h, y \pm h)$, les deux signes étant choisis à l'aide de deux tirages à pile ou face. On itère ces déplacements jusqu'à ce que l'on sorte de D.

Commençons, afin de vérifier la validité de cette méthode, avec le disque unité et les fonctions f déjà traitées.

1. Écrire un programme qui pour un point P donné effectue les déplacements aléatoires jusqu'à la sortie de D.
2. Écrire un programme qui estime la température en un point P donné.
3. Utiliser ce programme sur tout un maillage de points de D afin de représenter la répartition de la température dans la plaque. Comparer vos résultats avec ceux de la partie précédente.

   On considère maintenant d'autres domaines.
4. Soit D l'intérieur d'un triangle de votre choix. Chacun des côtés du triangle est à température constante. Déterminer et représenter la répartition de température dans le triangle.
5. Soit D le domaine défini par l'équation $x^2 + xy + 2y^2 + y \leqslant 1$. On considère de nouveau la température nulle sous l'axe des abscisses et de 10° au-dessus. Représenter la température à l'intérieur de D.
6. Recommencer avec une fonction de température à l'extérieur de D définie par $f(x, y) = x^2$.

7. Commenter la méthode de Monte-Carlo. Comment peut-on estimer la précision de cette méthode ? Quelles sont ses avantages et ses défauts ?