DEVOIR

La calculatrice, le polycopié de cours et les tables de la loi normale sont autorisés.
Tous les résultats doivent être justifiés et correctement rédigés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : records (10 points)

On considère des résultats numériques successifs d'une certaine expérience. On dit qu'un résultat est un record parmi N résultats s'il en est le maximum. Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés probabilistes des records.

Notons $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables continues indépendantes de même loi. Notons f leur densité et F leur fonction de répartition.

1. **Loi du record**

   Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Notons $R_N = \max_{k\leqslant N} X_k$. La variable R_N représente le record des N premiers tirages.

   (a) Montrer que la fonction de répartition de R_N est donnée par $F_R = F^N$.

   (b) Supposons jusqu'à la fin de cette partie 1 que les variables X_k suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$.
   Déterminer alors la densité de R_N et la représenter.

   (c) Calculer la valeur moyenne de R_N.

   (d) Faisons maintenant varier N. Remarquer que la suite des valeurs prises par les variables R_N est croissante et déduire des questions précédentes qu'elle converge presque sûrement vers 1.

2. **Nombre de tentatives pour obtenir un nouveau record**

   On connaît le résultat du premier tirage X_1. On le note a. On souhaite déterminer le nombre moyen de tirages qu'il faut effectuer pour réussir à dépasser la valeur a.

   (a) Soit $k > 1$. Exprimer la probabilité $p_a = \mathbf{P}(X_k > a)$ en fonction de f ou de F.

   Notons Y le nombre de tirages nécessaires pour dépasser a :
   pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $Y = n$ si $\forall k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $X_k \leqslant a$ et $X_{n+1} > a$.

   (b) Quelle est la loi de Y ?

   (c) En déduire le nombre moyen de tentatives nécessaire pour dépasser a.

   (d) Supposons qu'un nouveau record ait été établi ; notons b sa valeur. Que peut-on dire de p_b par rapport à p_a ?

   (e) Que peut-on en déduire sur les temps écoulés entre les nouveaux records successifs ?

Exercice 2 (4 points)

1. Représenter le graphe d'une fonction de densité f (discrète ou continue) associée à une variable aléatoire X telle que $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\mathbf{V}(X) \approx 10$.

2. Représenter le graphe d'une fonction de densité f (discrète ou continue) associée à une variable aléatoire X telle que $\mathbf{E}(X) \approx 0$, $\mathbf{V}(X) \approx 10$ et $\mathbf{P}(X \leqslant 2) \approx 0,75$.

Exercice 3 : estimation d'un paramètre. (8 points)

Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, où λ est un paramètre strictement positif. Le but de cet exercice est d'estimer la valeur du paramètre λ à partir des tirages des variables X_k.

On rappelle que la loi exponentielle a pour densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ définie pour $x \geqslant 0$. Son espérance est $\frac{1}{\lambda}$ et sa variance est $\frac{1}{\lambda^2}$.

Enfin, nous considérons un entier $n \geqslant 100$ et notons $\overline{X}_n$ la moyenne des n premiers tirages X_k :

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}.$$

1. Que peut-on dire du comportement de la suite $\overline{X}_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?
2. On suppose dans cette question $\lambda = 0,5$ et $n = 100$. Estimer à l'aide du théorème central limite la probabilité
$$\mathbf{P}(1,9 \leqslant \overline{X_{100}} \leqslant 2,1).$$
3. Déterminer des nombres α_n et β_n (ne dépendant que de n) tels que
$$\mathbf{P}(\frac{\alpha_n}{\lambda} \leqslant \overline{X}_n \leqslant \frac{\beta_n}{\lambda}) \approx 0,99.$$
Cet encadrement permet de donner une estimation de λ. À partir de n tirages X_k obtenus, on calcule leur moyenne $\overline{X}_n$ et on estime au risque de 1% que λ est dans l'intervalle $[\frac{\alpha_n}{\overline{X}_n}, \frac{\beta_n}{\overline{X}_n}]$ appelé intervalle de confiance.
4. On a effectué 100 tirages et on a obtenu $\overline{X}_{100} = 2,23$. Donner l'intervalle de confiance correspondant pour λ.
5. On souhaite obtenir une estimation de λ avec une précision de $0,05$. On sait seulement que $\lambda < 0,8$.
D'après la question 3, à partir de quelle valeur de n peut-on raisonnablement considérer que $\overline{X}_n$ est supérieur à 1.
Proposer alors une valeur de n pour laquelle l'intervalle de confiance de λ au risque de 1% est de longueur inférieure à $0,05$.