Contrôle

La calculatrice et les documents sont autorisés. Toutes vos réponses doivent être soigneusement rédigées. Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 : Désintégration d'atomes radioactifs (7 points)

On dispose d'un matériau radioactif. On souhaite étudier la désintégration de ses atomes. On note X le nombre d'atomes désintégrés en une heure. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre 5. On pensera à utiliser les tables de la loi de Poisson.

1. Quelle est la probabilité qu'aucun atome ne se soit désintègré au bout d'une heure ? Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 8 désintégrations ?

   Un appareil de détection se déclenche si un ou plusieurs atomes se désintègrent. Il est cependant imparfait. On admet que s'il y a eu n désintégrations d'atomes en une heure, la probabilité que l'appareil ne se déclenche pas est égale à $(0,6)^n$.
   On note $Y = 1$ si l'appareil se déclenche et $Y = 0$ sinon.

2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbf{P}(Y = 0)$.
   On pourra commencer par représenter le problème à l'aide d'un arbre (infini). On rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.
4. Si l'appareil ne s'est pas déclenché, quelle est la probabilité qu'aucun atome ne se soit désintégré ?
5. S'il y a au moins 8 désintégrations, montrer que la probabilité que l'appareil ne se déclenche pas est de l'ordre de 0,01.
6. Que peut-on dire de la qualité de l'appareil de détection ?

Exercice 2 : Produit de nombres aléatoires (7 points)

Soient X et Y des variables aléatoires suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. Soit $Z = XY$. Le but de cet exercice est d'étudier la loi de Z.

1. Soit $t \in]0,1[$. Représenter dans le carré $[0,1]^2$ l'ensemble $\{(x,y) \in [0,1]^2 \mid y \leq \dfrac{t}{x}\}$.
2. Montrer que la fonction de répartition de Z est donnée par

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t - t\ln(t) & \text{si } t \in]0,1[\\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

   On pourra interpréter certaines probabilités comme des aires de parties du carré $[0,1]^2$.
3. En déduire la densité de Z et la tracer.
4. Si on tire deux nombres avec la fonction *rand* de Matlab, quelle est la probabilité que leur produit soit supérieur à $\frac{1}{2}$?
5. Calculer l'espérance de Z.
   Indication : $(\frac{2x^2\ln(x) - x^2}{4})' = x\ln(x)$.
6. Soit $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $Y = 1 - X$. On admet que $Y \sim \mathcal{U}([0,1])$.
   Calculer $\mathbf{E}[XY]$ à l'aide du théorème de transfert. Le résultat contredit-il celui de la question précédente ?

Exercice 3 : Saturation d'un point d'accès à internet (7 points)

Un fournisseur d'accès à internet met en place un point local d'accès, qui dessert n abonnés. À un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres. On suppose que le point d'accès peut gérer 1000 connexions simultanées. Au-delà, il est saturé.

On se place à un instant donné. Pour chaque abonné i, on note $X_i = 1$ si l'abonné est connecté et $X_i = 0$ sinon. On pose $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Exprimer la probabilité p que le point d'accès soit saturé.
2. Quelle est la loi des variables X_i ? Quelle est la loi de S ?
3. Il y a $n = 4000$ abonnés. Estimer p à l'aide du théorème central limite.
4. Déterminer le nombre d'abonnés que le point d'accès peut desservir de manière à ce que la probabilité qu'il soit saturé soit de l'ordre de 0,01.