Corrigé du contrôle

Exercice 1 : Désintégration d'atomes radioactifs

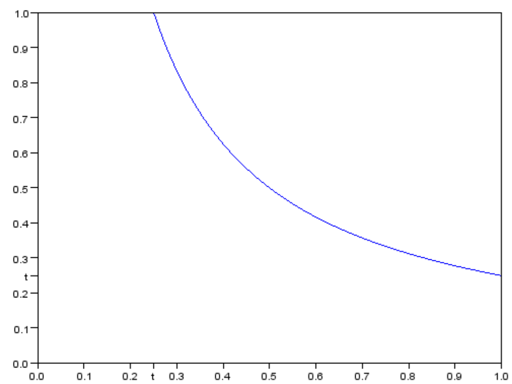
On dispose d'un matériau radioactif. On souhaite étudier la désintégration de ses atomes. On note X le nombre d'atomes désintégrés en une heure. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre 5. On pensera à utiliser les tables de la loi de Poisson.

1. On calcule
$$\mathbf{P}(X=0)=e^{-5}\approx 0,0067.$$
$$\mathbf{P}(X\geq 8)=1-\mathbf{P}(X<8)=1-F(7)\approx 1-0,867=0,133.$$
2. Les variables X et Y ne sont clairement pas indépendantes. Si il n'y a pas de désintégration, l'appareil ne se déclenche pas : $X=0 \implies Y=0$.
Ainsi, $\mathbf{P}((X=0)\cap(Y=1))=0\neq \mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=1)$.
3. D'après l'énoncé, $P(Y=0|X=n)=(0,6)^n$. Donc
$$\mathbf{P}(Y=0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}((Y=0)\cap(X=n))=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-5}\frac{5^n}{n!}\times(0,6)^n=e^{-5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}=e^{-2}\approx 0,135.$$
4. On calcule
$$\mathbf{P}(X=0|Y=0)=\frac{\mathbf{P}((X=0)\cap(Y=0))}{\mathbf{P}(Y=0)}=\frac{\mathbf{P}(X=0)}{\mathbf{P}(Y=0)}=e^{-3}\approx 0,050.$$
Si l'appareil était parfait, on aurait dû obtenir une probabilité égale à 1.
5. On calcule
$$\mathbf{P}(Y=0|X\geq 8)=\frac{\mathbf{P}((X\geq 8)\cap(Y=0))}{\mathbf{P}(X\geq 8)}$$
Or $\mathbf{P}((X\geq 8)\cap(Y=0))=\sum_{n=8}^{+\infty}e^{-5}\frac{5^n}{n!}\times(0,6)^n=e^{-2}\sum_{n=8}^{+\infty}e^{-3}\frac{3^n}{n!}$. On reconnaît une loi de Poisson de paramètre 3. Comme $\sum_{n=8}^{+\infty}e^{-3}\frac{3^n}{n!}=1-\sum_{n=0}^{7}e^{-3}\frac{3^n}{n!}$ on peut obtenir cette valeur du second facteur dans la table de la loi de Poisson : $\mathbf{P}((X\geq 8)\cap(Y=0))=e^{-2}(1-\times 0,998)$. Et finalement
$$\mathbf{P}(Y=0|X\geq 8)=\frac{e^{-2}(1-\times 0,998)}{0,133}\approx 0,002.$$
Si l'appareil avait été parfait, on aurait dû obtenir 0.
6. On constate que si l'appareil ne se déclenche pas, il est difficile d'affirmer qu'il n'y a pas eu de désintégration. L'appareil de détection est donc sévèrement mis en défaut. Cependant, s'il y a eu un nombre suffisant de désintégrations, la probabilité qu'il ne se déclenche pas devient très faible. Il n'y alors presque plus d'erreurs. On peut conclure que cet appareil détecte bien le fait qu'il y eu des désintégrations s'il y en a eu un certain nombre. S'il y en a trop peu, il y a des chances qu'il ne détecte rien.

Exercice 2 : Produit de nombres aléatoires

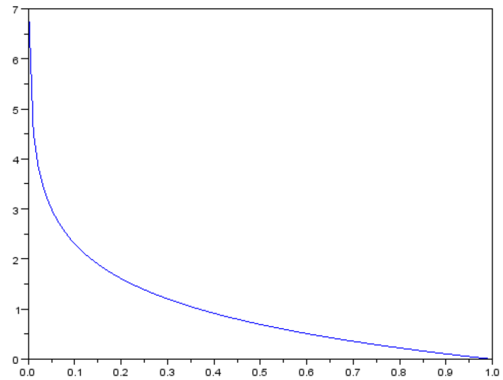
Soient X et Y des variables aléatoires suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. Soit $Z = XY$. Le but de cet exercice est d'étudier la loi de Z.

1. L'ensemble recherché est la région située sous la courbe ci-dessous (il s'agit de l'hyperbole d'équation $y = \frac{t}{x}$).



2. Soit $t \in \mathbf{R}$.
$$F_Z(t) = \mathbf{P}(Z \leq t) = \mathbf{P}(XY \leq t) = \mathbf{P}(Y \leq \frac{t}{X}).$$
Comme X et Y sont indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$, cette probabilité est égale à l'aire de la région du carré $[0,1]^2$ définie dans la question 1.
Si $t < 0$, cet ensemble est vide et $F_Z(t) = 0$. Si $t > 1$, tous les couples (x,y) de $[0,1]^2$ vérifient $y \leq \frac{t}{x}$ et l'ensemble est donc le carré lui-même d'aire 1.
Enfin, si $0 \leq t \leq 1$, l'aire de l'ensemble est composée de l'aire d'un rectangle de côtés t et 1 et de l'aire sous la courbe $y = \frac{t}{x}$ pour x entre t et 1. On calcule cette seconde aire à l'aide d'une intégrale et on obtient $F_Z(t) = t + \int_t^1 \frac{t}{x} dx = t - t\ln(t)$.
On peut conclure
$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t - t\ln(t) & \text{si } t \in]0,1[\\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

3. La densité de Z est donnée par
$$f_Z(t) = F'_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ -\ln(t) & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$



4. Les tirages x et y effectués avec la fonction *rand* sont censés être indépendants et suivre la loi uniforme sur $[0,1]$. Ainsi la probabilité recherchée est donnée par

$$\mathbf{P}(xy \geq \frac{1}{2}) = \mathbf{P}(Z \geq \frac{1}{2}) = 1 - F_Z(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2) \approx 0,15.$$

5. $$\mathbf{E}[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)dt = \int_0^1 -t\ln(t)dt = \left[\frac{-2t^2\ln(t)+t^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

   Remarque : comme X et Y sont indépendantes, on doit obtenir $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$. C'est bien le cas : $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.

6. La variable X suit une loi uniforme dont la densité est la fonction constante 1 sur $[0,1]$. Ainsi, par le théorème de transfert

$$\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X - X^2] = \int_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}.$$

   On ne retrouve pas le résultat de la question précédente. En effet, les variables X et Y ne sont clairement pas ici indépendantes. Les résultats des questions précédentes ne peuvent donc pas s'appliquer.

Exercice 3 : Saturation d'un point d'accès à internet

1. $p = \mathbf{P}(S > 1000)$.
2. Les variables X_i suivent la loi de Bernouilli de paramètre 0,2 : $\forall i,\ X_i \sim \mathcal{B}(0,2)$. La variable S est une somme de Bernouilli indépendantes. Elle suit la loi binomiale de pramètres 5000 et 0,2 : $S \sim \mathcal{B}(5000,\ 0,2)$
3. Il y a $n = 4000$ abonnés. En particulier, $n > 30$. De plus, S est une somme de variables indépendantes d'espérance $0,2$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{0,2 \times 0,8} = 0,4$. D'après le théorème central limite
$$\frac{S - 0,2n}{0,4\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$
Or
$$p = \mathbf{P}(S > 1000) = \mathbf{P}\left(\frac{S - 0,2n}{0,4\sqrt{n}} > \frac{1000 - 0,2n}{0,4\sqrt{n}}\right).$$
Avec $n = 4000$, $\frac{1000-0,2n}{0,4\sqrt{n}} \approx 7,9$. Donc $p \approx 1 - F_{\mathcal{N}}(7,9)$. D'après les tables de la loi normale, cette probabilité est très proche de 0. Le point d'accès n'a presqu'aucune chance d'être saturé avec seulement 4000 abonnés.
4. On souhaite avoir $p = 0,01$. On cherche donc n tel que
$$\mathbf{P}\left(\frac{S - 0,2n}{0,4\sqrt{n}} > \frac{1000 - 0,2n}{0,4\sqrt{n}}\right) = 0,01.$$
On doit avoir $1 - F_{\mathcal{N}}\left(\frac{1000-0,2n}{0,4\sqrt{n}}\right) = 0,01$. D'après les tables, on obtient
$$\frac{1000 - 0,2n}{0,4\sqrt{n}} = 2,33.$$
Cette équation revient à $0,2n + 2,33 \times 0,4\sqrt{n} - 1000 = 0$. C'est une équation de degré 2 en $\sqrt{n}$. On la résout et on trouve
$$n = 4681.$$
En tolérant un risque de 1% qu'il y ait saturation, le point d'accès peut desservir jusqu'à 4681 abonnés.