Contrôle

Exercice 1

Trois cuisiniers A, B et C préparent des gâteaux. Ils ne passent pas le même temps pour préparer leurs gâteaux mais ont également des résultats différents. Le cuisinier A par exemple passe 10 minutes par gâteau (on ne tient pas compte du temps de cuisson) mais en rate beaucoup.

Cent gâteaux ont été cuisinés. Ils sont répartis dans le tableau ci-dessous selon le temps nécessaire pour leur confection et leur qualité.

Cuisiniers	A	B	C
Temps de préparation par gâteau	10 mn	15 mn	20 mn
Nombre de gâteaux réussis	30	25	19
Nombre de gâteaux ratés	20	5	1

Pour un gâteau donné, on note T son temps de fabrication et on définit la variable X par $X = 1$ si le gâteau est réussi et $X = 0$ s'il est raté.

1. Évaluer d'après le tableau les probabilités $\mathbf{P}(T = 10 \cap X = 1)$, $\mathbf{P}(T = 10)$, et $\mathbf{P}(X = 1)$.
2. Montrer que les variables T et X ne sont pas indépendantes.
3. On considère un gâteau reussi. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par le cuisinier A ?
4. Représenter la densité de la variable T.
5. Quelle est la loi de X ?
6. On souhaite déterminer le cuisinier qui produit le plus de gâteaux réussis en deux heures. On commence par étudier les gâteaux confectionnés par le cuisinier A. On fixe donc $T = 10$ et on note alors Y_A le nombre de gâteaux que l'on arrive à réussir en deux heures.
   (a) Quelle est la loi de Y_A ?
   (b) En déduire $\mathbf{E}[Y_A]$.
   (c) Refaire de même avec les cuisiners B et C en fixant $T = 15$ et $T = 20$.
   (d) Quel cuisiner est le plus efficace ?

Exercice 2

Soient X et Y deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.
On définit la variable $Z = \dfrac{Y}{X}$.

1. Montrer que la fonction de répartition de Z est définie par

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{t}{2} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

   On pourra interpréter les probabilités à calculer comme des surfaces de parties du carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

2. En déduire la densité f_Z de Z. La tracer.
3. Quelle est l'espérance de Z ?
4. Soient a et b tels que $0 < a < b < 1$. Calculer $\mathbf{P}(a < Z < b \mid Z \leq 1)$.
5. En déduire la loi de Z sachant que $Z \leq 1$.

Exercice 3

On étudie le fonctionnement des assurances. On considère donc un assureur qui dédommage à hauteur de 5000 euros les biens (voiture ou biens mobiliers par exemple) de ses assurés.
On suppose que pour le type de bien considéré, les ordres de grandeur (en euros) des sinistres et les probabilités que ceux-ci se produisent au cours d'une année sont donnés par le tableau suivant.

Valeur du sinistre	0	100	500	1000	5000
Probabilités	0,90	0,07	0,02	0,008	0,002

Il y a N assurés. Pour chaque assuré i, on note X_i la valeur du sinistre qu'il a subi. La somme totale qu'aura remboursée l'assureur durant l'année est ainsi donnée par la variable $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.
Enfin on note k la prime d'assurance en euros, c'est à dire ce que chaque assuré paye à l'assurance chaque année.

1. Calculer grâce au tableau $\mathbf{E}[X_i]$ et $V(X_i)$.
   Indication : on doit obtenir un écart-type $\sigma_{X_i} \approx 250$.
2. Exprimer en fonction de N, k et S le bénéfice sur l'année de l'assureur.
3. Écrire le théorème central limite pour la variable S.
4. Il y a $N = 1000$ assurés et la prime d'assurance est fixée à $k = 40$ euros.
   Évaluer la probabilité p que le bénéfice de l'assureur soit positif.

   On souhaite améliorer cette probabilité. Nous allons le faire de deux manières.

5. Déterminer la prime d'assurance k que doit fixer l'assureur pour avoir $p = 0,95$.
6. En maintenant la prime à 40 euros, déterminer le nombre N de personnes qu'il faudrait assurer pour avoir $p = 0,95$.