Contrôle

Exercice 1

Cuisiniers	A	B	C
Temps de préparation par gâteau	10 mn	15 mn	20 mn
Nombre de gâteaux réussis	30	25	19
Nombre de gâteaux ratés	20	5	1

1. D'après le tableau on observe $\mathbf{P}(T = 10 \cap X = 1) = \frac{30}{100}$, $\mathbf{P}(T = 10) = \frac{30+20}{100} = \frac{1}{2}$, et $\mathbf{P}(X = 1) = \frac{30+25+19}{100} = \frac{74}{100}$.
2. On remarque que $\mathbf{P}(T = 10) \times \mathbf{P}(X = 1) = 0,222 \neq 0,3 = \mathbf{P}(T = 10 \cap X = 1)$. Les variables X et T ne sont donc pas indépendantes. Cela traduit juste le fait que la proportion de gâteaux réussis est différente selon le cuisinier, ce qui est clair dans le tableau.
3. On cherche $\mathbf{P}(T = 10|X = 1)$. Par définition, $\mathbf{P}(T = 10|X = 1) = \frac{\mathbf{P}(T=10\cap X=1)}{\mathbf{P}(X=1)} = \frac{30}{74}$.
4. La variable T prend les valeurs $10, 15$ ou 20. C'est donc une variable discrète. D'après le tableau, $\mathbf{P}(T = 10) = O,5$, $\mathbf{P}(T = 15) = 0,3$ et $\mathbf{P}(T = 20) = 0,2$. On peut donc représenter sa densité avec trois "bâtons" de hauteurs $0,5$, $0,3$ et $0,2$ aux abscisses $10, 15$ et 20.
5. La variable X représente la réussite d'un gâteau donné. Elle est à valeur dans $\{0, 1\}$. C'est donc une variable de Bernouilli. La probabilité de succès est donnée par $\mathbf{P}(X = 1) = 0,3$. Donc $X \approx \mathcal{B}(0,3)$.
6. (a) En deux heures, le cuisinier A peut préparer 12 gâteaux. Notons $X_A^i = 1$ si le i-ème gâteau est réussi et $X_A^i = 0$ sinon. On peut supposer que ces 12 variables sont indépendantes. De plus, $\mathbf{P}(X_A^i = 1) = \mathbf{P}(X = 1|T = 10) = \frac{3}{5}$. La variable Y_A représentant le nombre de gâteaux réussis, on a $Y_A = \sum_{i=1}^{12} X_A^i$. C'est donc une somme de 12 variables de Bernouilli indépendantes de paramètre $\frac{3}{5}$. Ainsi, Y_A suit une loi binomiale : $Y_A \approx \mathcal{B}(12, \frac{3}{5})$.

   (b) L'espérance d'une loi binomiale est connue : $\mathbf{E}[Y_A] = 12 \times \frac{3}{5} = 7,2$.

   (c) Avec les mêmes raisonnements, on définit les variables Y_B et Y_C et on montre $Y_B \approx \mathcal{B}(8, \frac{25}{30})$ et $Y_C \approx \mathcal{B}(6, \frac{19}{20})$. Ainsi, $\mathbf{E}[Y_B] = 8 \times \frac{25}{30} = 6,66\cdots$ et $\mathbf{E}[Y_C] = 6 \times \frac{19}{20} = 5,7$.

   (d) Le cuisinier A est donc celui qui produit en moyenne le plus de gâteaux en deux heures. Cela peut sembler paradoxal car il est aussi celui qui rate le plus de gâteaux et qui gâche donc le plus de nourriture mais il n'en est rien. C'est en fait la notion d'efficacité proposée par l'énoncé qui est sans doute discutable.

Exercice 2

1. La fonction de répartion de Z est définie pour tout t par

$$F_Z(t) = \mathbf{P}(Z \leq T) = \mathbf{P}(\frac{Y}{X} \leq t) = \mathbf{P}(Y \leq tX).$$

   Cette dernière probabilité peut être vue comme l'aire de la région du carré $[0,1] \times [0,1]$ définie par l'inégalité $y \leq tx$. Lorsque t est négatif, on a clairement $\mathbf{P}(\frac{Y}{X} \leq t) = 0$ puisque les variables X et Y sont à valeurs positives. Lorsque $0 < t < 1$, la probabilité recherchée peut se traduire à l'aide d'une intégrale double

$$\mathbf{P}(Y \leq tX) = \int_0^1 \int_0^{tx} dydx = \int_0^1 txdx = [\frac{tx^2}{2}]_0^1 = \frac{t}{2}.$$

   Lorsque $t \geq 1$, cela s'écrit

$$\mathbf{P}(Y \leq tX) = 1 - P(Y > tX) = 1 - \int_0^1 \int_0^{\frac{y}{t}} dxdy = 1 - \int_0^1 \frac{y}{t} dy = 1 - \frac{1}{2t}.$$

   On retrouve bien la fonction de répartition demandée.

2. La densité est la dérivée de la fonction de répartition. Ainsi, en dérivant F_Z, on obtient

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

3. Calculons l'espérance de Z :

$$\mathbf{E}[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_Z(t)dt = \int_0^1 \frac{t}{2}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}dt.$$

   Cette première intégrale vaut $\frac{1}{4}$ mais la deuxième est une intégrale divergente. Ainsi $\mathbf{E}[Z] = +\infty$ ou plutôt Z n'a pas d'espérance finie.

4. Par définition $\mathbf{P}(a < Z < b \mid Z \leq 1) = \frac{\mathbf{P}(a<Z<b \cap Z \leq 1)}{\mathbf{P}(Z \leq 1)} = \frac{\mathbf{P}(a<Z<b)}{\mathbf{P}(Z \leq 1)}$. Or $\mathbf{P}(Z \leq 1) = F_Z(1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(a < Z < b) = F_Z(b) - F_Z(a) = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$ car $a, b \in [0,1]$. Donc $\mathbf{P}(a < Z < b \mid Z \leq 1) = b - a$.

5. On reconnaît la probabilité donnée par une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Comme elle est valable pour tous $a, b \in [0,1]$, on en déduit que la loi de Z sachant que $Z \leq 1$ est la loi uniforme sur $[0,1]$. On pouvait le remarquer avec le tracé de f_Z : entre 0 et 1, cette densité est constante comme l'est celle de la loi uniforme.

Exercice 3

1. D'après le tableau $\mathbf{E}[X_i] = 0\times 0,90+100\times 0,07+500\times 0,02+1000\times 0,008+5000\times 0,002 = 35$ et $V(X_i) = (0-35)^2 \times 0,90 + (100-35)\times 0,07 + (500-35)\times 0,02 + (1000-35)\times 0,008 + (5000-35)\times 0,002 = 62475$. On en déduit que $\sigma_{X_i} = \sqrt{V(X_i)} \approx 249,95$.
2. L'assureur reçoit la prime k de la part de chacun des N assurés mais doit débourser dans l'année la somme S pour les dédommager. Son bénéfice sur l'année est donc égal à $kN-S$.
3. On peut supposer que les variables X_i sont indépendantes. En effet, les différents accidents qui peuvent arriver aux assurés n'ont a priori rien à voir les uns avec les autres. Comme S est la somme de ces N variables aléatoires indépendantes et de même loi, on peut considérer avec le théorème central limite que si N est assez grand, la variable $\dfrac{S-N\mathbf{E}[X_i]}{\sigma_{X_i}\sqrt{N}}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
4. On cherche à déterminer $\mathbf{P}(kN-S>0)$. Or $\mathbf{P}(kN-S>0) = \mathbf{P}(S<kN) = \mathbf{P}(\frac{S-35N}{250\sqrt{N}} < \frac{kN-35N}{250\sqrt{N}})$. D'après la question précédente, comme $N = 1000$ est très grand, $\mathbf{P}(kN-S>0) \approx F_{\mathcal{N}}(\frac{kN-35N}{250\sqrt{N}}) = F_{\mathcal{N}}(0,64)$. D'après la table de la loi normale, on obtient que la probabilité que le bénéfice soit positif est $0,74$.
5. D'après le raisonnement ci-dessus, $\mathbf{P}(kN-S>0) \approx F_{\mathcal{N}}(\frac{kN-35N}{250\sqrt{N}})$. Or on souhaite que cette probabilité soit égale à $0,95 = F_{\mathcal{N}}(1,65)$. Il faut donc que $\frac{kN-35N}{250\sqrt{N}} = 1,65$. Avec $N = 1000$, on obtient $k \approx 48$ euros.
6. De la même manière, on souhaite toujours avoir $\frac{kN-35N}{250\sqrt{N}} = 1,65$, mais cette fois, on cherche N. En simplifiant l'expression par $\sqrt{N}$, on obtient $\sqrt{N} = \frac{1{,}65\times 250}{40-35} = 82,5$. Il faut donc assurer plus de 6800 personnes pour que le risque d'avoir une année déficitaire soir inférieur à 5%.
   Remarque : ce dernier résultat est le plus intéressant. Le principe de base des assurances et des mutuelles est que plus il y a de personnes et plus le système est solide. Cela repose fortement sur le théorème central limite : plus N est grand, plus l'écart à la moyenne sera faible, ou plus précisemment, plus le risque qu'il y ait beaucoup trop d'assurés subissant des dommages sera faible.
   Cependant, dans le cadre de catastrophes naturelles, il arrive que beaucoup de personnes subissent en même temps de forts dommages, ce qui met en danger la compagnie d'assurance. L'hypothèse d'indépendance dans ce genre de situation devient fausse. Pour palier ce risque, il existe dasn certains domaines des compagnies d'assurance qui assurent les compagnies d'assurance contre ces risques rares.