

EXAMEN DE RATRAPAGE

La calculatrice et les documents sont autorisés. Toutes vos réponses doivent être soigneusement rédigées.

Vous rendrez une copie pour la partie probabilités et une autre copie pour la partie statistiques.

Exercice 1 (5 points)

Soit X la variable aléatoire représentant le salaire mensuel d'un salarié (en milliers d'euros). On considère que cette variable suit une loi de Pareto de paramètre 2, c'est à dire que sa densité est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité.
2. Donner l'espérance de X et tracer la fonction de répartition F_X .

On s'intéresse aux 25% de salariés les plus riches et on souhaite comparer leur richesse à celle de la population globale.

3. Déterminer α tel que $\mathbf{P}(X \geq \alpha) = \frac{1}{4}$. Que représente α ?
4. Calculer $\int_{\alpha}^{+\infty} x f_X(x) dx$.
5. Interpréter le rapport $\frac{\int_{\alpha}^{+\infty} x f_X(x) dx}{\int_1^{+\infty} x f_X(x) dx}$ en terme de répartition des revenus.

Exercice 2 (5 points)

Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. À un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t . Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. Écrire le théorème central limite pour la variable X .
3. Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%. Proposer à l'aide de la table de la loi normale une valeur approchée de ce nombre de connexions.