Contrôle

Les documents sont interdits, la calculatrice est autorisée.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Combinaison de lois normales (6 points)

Une étude s'est intéressée à la quantité maximale de fumées toxiques (d'une certaine substance) que peuvent supporter les individus. Chez les femmes, ce seuil est modélisé par une variable X_f suivant la loi normale $\mathcal{N}(38, 9)$, et chez les hommes par X_h suivant la loi normale $\mathcal{N}(48, 9)$.

On prend un individu au hasard dans la population et on note X le seuil d'enfumage toxique qu'il peut supporter.

1. Justifier que pour tout x,

$$\mathbf{P}(X \leqslant x) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_f \leqslant x) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_h \leqslant x)$$

On fait l'hypothèse qu'il y a autant d'hommes que de femmes dans la population. Un individu pris au hasard a donc une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être une femme et une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être un homme. La situation se modélise simplement par un arbre à deux branches. La probabilité demandée se lit directement sur cet arbre :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \leqslant x) &= \mathbf{P}(\text{Femme}) \times \mathbf{P}(X \leqslant x \mid \text{Femme}) \ + \ \mathbf{P}(\text{Homme}) \times \mathbf{P}(X \leqslant x \mid \text{Homme}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_f \leqslant x) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_h \leqslant x)\end{aligned}$$

2. En déduire l'expression de la densité f_X de X.

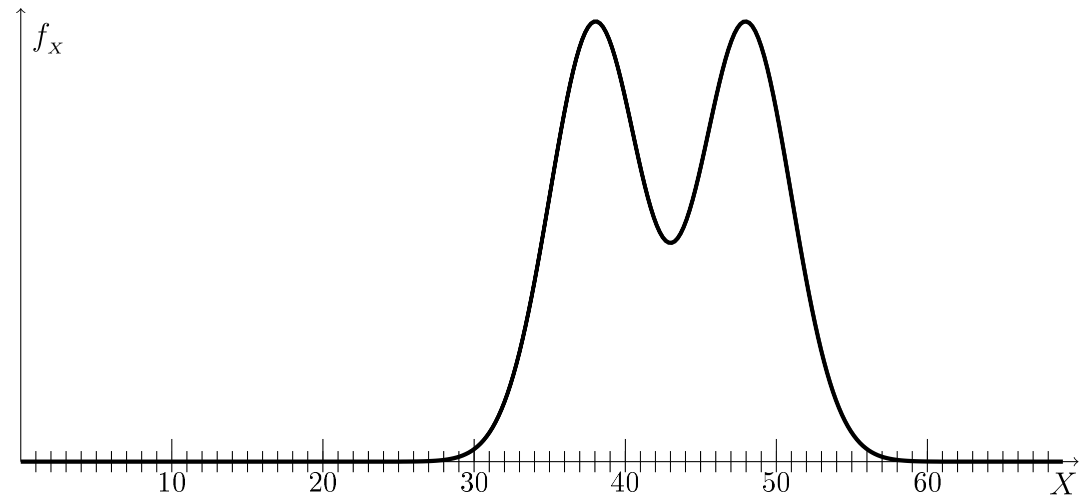
Par définition, $\mathbf{P}(X_f \leqslant x) = F_f(x)$ où F_f désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(38, 9)$, et $\mathbf{P}(X_h \leqslant x) = F_h(x)$ où F_h désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(48, 9)$. L'égalité précédente se réécrit ainsi :

$$F_X(x) = \frac{1}{2}F_f(x) + \frac{1}{2}F_h(x)$$

Dérivons pour obtenir la densité de X :

$$f_X(x) = \frac{1}{2}f_f(x) + \frac{1}{2}f_h(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-38)^2}{18}} + \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-48)^2}{18}}.$$

Nous la représentons ci-dessous.



3. Estimer graphiquement l'espérance et l'écart-type de X.

   Par symétrie de la densité, l'espérance de X est clairement égale à 43. L'écart-type est l'écart quadratique moyen à la moyenne. Il est de l'ordre de 5. (Sa valeur exacte est $\sqrt{34} \approx 5,8$.

4. On observe une quantité d'enfumage de 36,7. On souhaite déterminer la part d'individus en danger.
   Calculer à 10^{-2} près les probabilités $\mathbf{P}(X_f \leqslant 36{,}7)$, $\mathbf{P}(X_h \leqslant 36{,}7)$ et $\mathbf{P}(X \leqslant 36{,}7)$.

   On se ramène à la loi normale centrée réduite : Comme $X_f \sim \mathcal{N}(38,9)$, $\frac{X_f-38}{3} \sim \mathcal{N}(0,1)$ et de même, $\frac{X_h-48}{3} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Alors

   $$\mathbf{P}(X_f \leqslant 36{,}7) = \mathbf{P}(\frac{X_f-38}{3} \leqslant \frac{36{,}7-38}{3}) = F_{\mathcal{N}}(-0,433) \approx 1-0,66 = 0,34.$$

   $$\mathbf{P}(X_h \leqslant 36{,}7) = \mathbf{P}(\frac{X_h-48}{3} \leqslant \frac{36{,}7-48}{3}) = F_{\mathcal{N}}(-3,77) \approx 0.$$

   Finalement,

   $$\mathbf{P}(X \leqslant 36{,}7) = \frac{1}{2} \times 0,34 \; + \; \frac{1}{2} \times 0 = 0,17.$$

5. En déduire simplement la quantité d'enfumage insupportable pour 83% de la population.

   Nous cherchons a tel que $\mathbf{P}(X \leqslant a) = 0,83$, autrement dit $\mathbf{P}(X \geqslant a) = 0,17$.
   En utilisant la symétrie de la densité de X, on peut se ramener au calcul précédent. L'espérance étant de 43, on a pour tout b, $\mathbf{P}(X \leqslant 43-b) = \mathbf{P}(X \geqslant 43+b)$. Ainsi, $\mathbf{P}(X \leqslant 36{,}7) = \mathbf{P}(X \geqslant 49{,}3) = 0{,}17$.
   La quantité d'enfumage insupportable pour 83% de la population est donc de $49,3$.

Exercice 2 : Produit de Pareto

On considère la loi de Pareto de densité définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

1. **Étude de la loi** **(5 points)**
   Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Pareto.
   (a) Calculer l'espérance de X.

   L'espérance de X est donnée par

   $$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2}\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^{+\infty} = +\infty.$$

   L'intégrale ci-dessus est divergente ; la variable X n'a pas d'espérance finie. C'est pour cette raison que l'on va plutôt s'intéresser ici à la médiane de X qui est elle finie.

   (b) Déterminer la fonction de répartition de X.

   Il s'agit de la primitive de f qui s'annule en 1. On trouve $F_X(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x}$.

   (c) Trouver la médiane de X, c'est-à-dire la valeur de m telle que $\mathbf{P}(X \leqslant m) = \frac{1}{2}$.

   On cherche m tel que $F_X(m) = \frac{1}{2}$. On trouve $m = 2$.

   (d) Soit $Z = \ln(X)$. Montrer que Z suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

   Cherchons la fonction de répartition de Z qui est une variable à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. Soit $t \geqslant 0$.

   $$F_Z(t) = \mathbf{P}(Z \leqslant t) = \mathbf{P}(X \leqslant \mathrm{e}^t) = F_X(\mathrm{e}^t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

   La densité de Z est alors donnée par

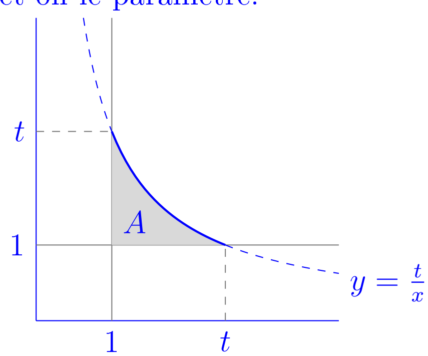
   $$f_Z(t) = F_Z'(t) = \mathrm{e}^{-t}.$$

   On reconnaît la densité d'une loi exponentielle. Ainsi $Z \sim \mathcal{E}(1)$.

2. **Couple de variables** **(5 points)**
   Soient X et Y deux variables indépendantes suivant toutes les deux la loi de Pareto.
   (a) Soit $P = XY$. Montrer que la fonction de répartition de P est définie par

   $$\forall t \geqslant 1, \quad F_P(t) = 1 - \frac{1}{t} - \frac{\ln(t)}{t}.$$

   Il s'agit d'un problème de couple de variables indépendantes. La variable P est à valeurs dans $[1, +\infty[$. Soit $t \geqslant 1$. On représente dans $[1, +\infty[\times[1, +\infty[$ l'ensemble $A = \{xy \leqslant t\}$ et on le paramètre.

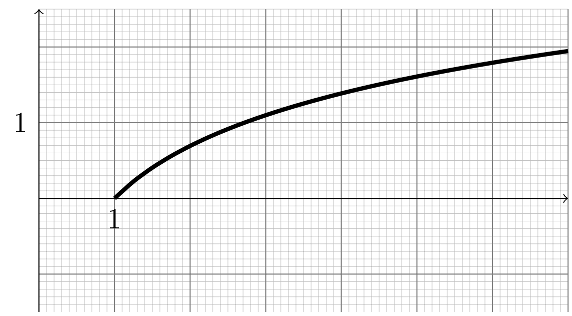


$$A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ 1 \leqslant x \leqslant t \ \text{ et } \ 1 \leqslant y \leqslant \frac{t}{x}\right\}$$

Alors

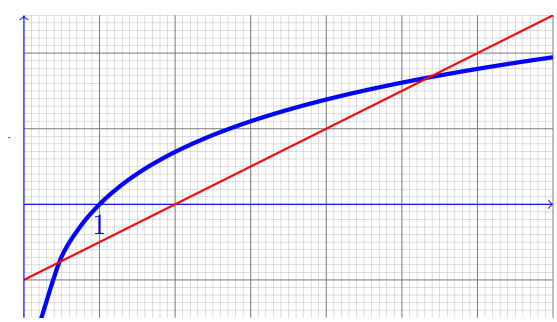
$$\begin{aligned}F_P(t) &= \mathbf{P}(XY \leqslant t) = \mathbf{P}(Y \leqslant \tfrac{t}{X}) \\ &= \int_{x=1}^{t} \int_{y=1}^{\frac{t}{x}} \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=1}^{t} \frac{1}{x^2} \left[-\frac{1}{y} \right]_1^{\frac{t}{x}} \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=1}^{t} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{tx} \mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{t} \right]_1^t \\ &= 1 - \frac{1}{t} - \frac{\ln(t)}{t}\end{aligned}$$

(b) Nous donnons ci-contre le graphe de $t \mapsto \ln(t)$ pour $t \in [1, 7]$. Estimer la médiane de P, en utilisant ce graphe ou une calculatrice.



On cherche à résoudre l'équation $F_P(t) = \frac{1}{2}$. Cela revient à résoudre $\frac{\ln(t)}{t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{t}$, ou encore $\ln(t) = \frac{t}{2} - 1$. Graphiquement, on peut tracer la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$ et déterminer le point où elle intersecte le graphe de ln. On obtient que la médiane de P vaut approximativement $5,4$.

Remarque : le graphe de ln se prolonge entre 0 et 1. Il existe ainsi une seconde intersection entre la droite et son graphe autour de la valeur $0,46$. C'est aussi une valeur qu'on peut obtenir avec la calculatrice. Elle n'a aucun sens pour notre problème puisqu'elle est inférieure à 1.



3. **Théorème central limite (4 points)**

Soit maintenant $n \geqslant 30$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes suivant la loi de Pareto. On pose $P_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Peut-on appliquer le théorème central limite aux variables X_i ?

La loi de Pareto n'ayant pas d'espérance finie, on ne peut pas lui appliquer le théorème central limite.

(b) Écrire le théorème central limite pour une somme de n variables indépendantes Z_i de même loi $\mathcal{E}(1)$.

La loi $\mathcal{E}(1)$ est d'espérance 1 et de variance 1. Le théorème central limite stipule que les variables $\frac{\sum_{i=1}^n Z_i \; - \; n\times 1}{\sqrt{1\times n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i \; - \; n}{\sqrt{n}}$ convergent en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque n tend vers l'infini.

(c) Déterminer ainsi la valeur de a pour laquelle $\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqslant a\right) \approx \frac{1}{2}$.

On considère que pour $n \geqslant 30$, $\frac{\sum_{i=1}^n Z_i \; - \; n}{\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ à peu près. Pour cette loi normale, $F_{\mathcal{N}}(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\mathbf{P}(\frac{\sum_{i=1}^n Z_i \; - \; n}{\sqrt{n}} \leqslant 0) \approx \frac{1}{2}$. On en déduit que $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^n Z_i \leqslant n) \approx \frac{1}{2}$, donc $a = n$.

(d) En déduire, à l'aide de la question 1-d, une estimation de la médiane de P_n.

On cherche b tel que $\mathbf{P}(P_n \leqslant b) \approx \frac{1}{2}$. Passons au logarithme dans cette inégalité :

$$\prod_{i=1}^{n} X_i \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\prod_{i=1}^{n} X_i) \leqslant \ln(b) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) \leqslant \ln(b).$$

Or, d'après la question 1-d, les variables $\ln(X_i)$ suivent la loi $\mathcal{E}(1)$. Comme les X_i sont indépendantes, les variables $\ln(X_i)$ le sont aussi. Ainsi, d'après la question précédente, $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^n \ln(X_i) \leqslant n) \approx \frac{1}{2}$. Donc $\ln(b) = n$ et $b = \mathrm{e}^n$.
Conclusion : lorsque n est très grand, la médiane de P_n est de l'ordre de e^n.

Formulaire de probabilités

Probabilités élémentaires

- Axiomes : $(\Omega, \mathbf{P})$ espace probabilisé si $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ et pour tous ensembles disjoints A_n,
$$\mathbf{P}(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$
- Union : $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
- Indépendance : $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$
- Proba conditionnelles :
$$\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$
- Formules de Bayes : $\mathbf{P}(B|A) = \dfrac{\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)}{\mathbf{P}(A)}$

  et $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|\overline{B})\mathbf{P}(\overline{B})$

Densité, fonction de répartition

- Variable aléatoire : $X : \Omega \to \mathbf{R}$
- Cas des variables continues

  Densité f_X de X : $\mathbf{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X$

  Fonction de répartition : $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$

  Déduire la densité de la f° de répart. : $f_X = F_X'$

Espérance, Variance

- Espérance : $\mathbf{E}(X) = \sum_i x_i \mathbf{P}_X(x_i)$ (discret)

  $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x$ (continu)

- Variance : $\mathbf{V}(X) = \sum_i (x_i - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}_X(x_i)$

  $\mathbf{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{E}(X))^2 f_X(x) \mathrm{d}x$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$

- Propriétés : $\mathbf{E}(X + \alpha Y) = \mathbf{E}(X) + \alpha \mathbf{E}(Y)$

  $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$

  $\mathbf{V}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \mathbf{V}(X)$

- X, Y indépendantes $\Longrightarrow$ $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$

  et $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$

Couple de variables

X, Y variables indépendantes de densités f_X, f_Y
$\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^2$.
Alors $\mathbf{P}((X,Y) \in \mathcal{A}) = \iint_{\mathcal{A}} f_X(x) f_Y(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$.
Représenter $\mathcal{A}$ et le paramétrer pour Fubini.

Lois usuelles

- Bernoulli : $X \sim \mathcal{B}(p)$

  $\mathbf{P}(X=1) = p, \quad \mathbf{P}(X=0) = 1-p$

  $\mathbf{E}(X) = p \qquad \mathbf{V}(X) = p(1-p)$
- Binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

  $\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in [\![0,n]\!]$

  $\mathbf{E}(X) = np \qquad \mathbf{V}(X) = np(1-p)$
- Géométrique : $X \sim \mathcal{G}(p)$

  $\mathbf{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbf{N}^*$

  $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- Uniforme : $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

  $f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a,b]$.

  $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Exponentielle : $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

  $f_X(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x \in \mathbf{R}_+$

  $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- Loi normale : $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

  $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R}$

  $\mathbf{E}(X) = m \qquad \mathbf{V}(X) = \sigma^2$.

  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

  $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ indép.

  $\Longrightarrow \quad X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Théorèmes limites

- Loi forte : (X_k) iid d'espérance m

  alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \to m$ presque sûrement

- TCL : (X_k) iid d'espérance m, variance σ^2

  alors $\dfrac{\sum_{k=1}^n X_k - nm}{\sigma\sqrt{n}} \to_{n\infty,\text{ en loi}} \mathcal{N}(0,1)$

- En pratique : pour $n \geqslant 30$, on a à peu près

$$\frac{\sum_1^n X_k - nm}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \sum_{k=1}^n X_k \sim \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$$

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_1^n X_k - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Quelques valeurs de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$:

x	0	0,25	0,43	0,61	0,84	1,08	1,30	1,65	1,96	2,33	2,58	3,0
$F_{\mathcal{N}}(x)$	0,5	0,60	0,66	0,73	0,80	0,86	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999

$$F_{\mathcal{N}}(-a) = 1 - F_{\mathcal{N}}(a) \qquad \mathbf{P}_{\mathcal{N}}([-a,a]) = 2F_{\mathcal{N}}(a) - 1$$