Devoir

Documents et calculatrice sont autorisés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : double pile (7 pts)

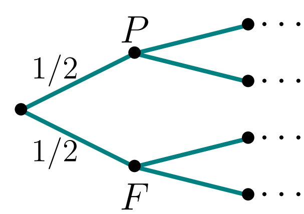
On lance une pièce jusqu'à ce qu'on obtienne deux « Pile » de suite et on note X le nombre de lancers qui ont été nécessaires. Par exemple, si la suite des lancers a donné $P\ F\ F\ P\ P$, alors $X = 5$.

Le but de cet exercice est de déterminer la loi de X ainsi que son espérance. Nous considérerons la pièce équilibrée et nous noterons :

$$\forall n \geqslant 1, \quad p_n = \mathbf{P}(X = n).$$

1. Déterminer les valeurs de p_1, p_2, p_3 et p_4.

Pour déterminer la loi de X, nous allons déterminer une relation de récurrence entre les probabilités p_n. Pour cela, nous allons raisonner sur le début des tirages en distinguant deux cas, selon le résultat du premier lancer.



2. Justifier que pour $n \geqslant 2$,
$$\mathbf{P}(X = n \mid \text{le premier lancer est tombé sur « Face »}) = \mathbf{P}(X = n-1).$$

3. Justifier de même que pour $n \geqslant 3$,
$$\mathbf{P}(X = n \mid \text{le premier lancer est tombé sur « Pile »}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X = n-2).$$

4. En déduire que pour $n \geqslant 3$,
$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}.$$

5. On note $(u_n)_n$ la suite de Fibonacci définie par $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et pour $n \geqslant 3$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\quad p_n = \dfrac{u_n}{2^n}$.

6. Calculer l'espérance de X.
On admet les résultats suivants :
$$\forall n,\ u_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(x-1)^2},$$
avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$.

Exercice 2 : aire aléatoire (6 pts)

On tire au hasard un point (x, y) dans le carré $[0,1] \times [0,1]$ et on considère le rectangle dont $(0,0)$ et (x, y) sont les sommets d'une diagonale. On souhaite étudier l'aire de ce rectangle.

Précisons les hypothèses. Nous supposons que x et y sont tirés uniformément et indépendamment. Nous posons ainsi $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $Y \sim \mathcal{U}([0,1])$ indépendantes. Et nous notons $A = XY$ l'aire du rectangle correspondant.

1. Quelles sont les valeurs prises par A ?
2. Montrer que la fonction de répartition de A est définie par $F_A(t) = t - t\ln(t)$.
3. En déduire la densité de A et la représenter.
4. Déterminer $\mathbf{E}(A)$ ainsi que la médiane de A.

Exercice 3 : erreur (7 pts)

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et soit $Y = X^2$. Il n'est pas possible d'exprimer à l'aide d'une formule simple la densité de Y. Mais nous allons néanmoins étudier certaines propriétés de Y.

1. Calculer $\mathbf{P}(Y \leqslant 2)$.
2. Montrer que $\mathbf{E}(Y) = 1$. On pourra utiliser le théorème de transfert et reconnaître la variance de X.
3. Donner, également à l'aide du théorème de transfert, l'expression sous forme intégrale de la variance de Y. On admet pour la suite que $\mathbf{V}(Y) = 2$.
4. Soient $Y_1, \ldots, Y_{100}$ 100 variables indépendantes de même loi que Y et soit $S = \sum_1^{100} Y_i$. Appliquer le théorème central limite et déterminer la valeur α pour laquelle
$$\mathbf{P}(S \leqslant \alpha) \approx 0,95.$$
5. On mesure 100 grandeurs $m_1, m_2, \ldots, m_{100}$. Les imprécisions de mesure sont modélisées par des lois normale de variance 1 : la mesure de m_i est une variable aléatoire Z_i de loi $\mathcal{N}(m_i, 1)$. Estimer la probabilité que la distance euclidienne entre le vecteur $(m_1, m_2, \ldots, m_{100})$ et le vecteur $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{100})$ soit supérieure à 11.

Cette loi est très utilisée en statistique pour tester des hypothèses. L'idée est de mesurer la distance entre les données observées et celles correspondant aux hypothèses faites. Si cette distance est anormalement élevée, c'est-à-dire dans une zone de probabilité très faible, on peut douter des hypothèses qui ont été posées. L'étude de cette loi permet, comme dans la question 5, de déterminer des seuils à partir desquels ont peut remettre en cause des hypothèses statistiques.

Quelques valeurs de la **fonction de répartition** $F_{\mathcal{N}}$ *de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.

x	0	0,31	0,63	0,96	1,23	1,41	1,65	1,96	2,00	2,33
$F_{\mathcal{N}}(x)$	0,5	0,63	0,74	0,83	0,89	0,92	0,95	0,975	0,98	0,99

Les valeurs pour $x < 0$ se déduisent de l'égalité $F_{\mathcal{N}}(-x) = 1 - F_{\mathcal{N}}(x)$.