Contrôle

Documents et calculatrice sont autorisés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Une loi Bêta

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de la loi Bêta de paramètres (2,1), notée $\boldsymbol{\beta}$. Sa densité est définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = 2x.$$

Il s'agit d'une des lois Bêta les plus simples, mais les propriétés que nous allons étudier ici s'étendent aux lois Bêta les plus complexes.

Nous considérons dans la suite une variable U suivant la loi $\boldsymbol{\beta}$ ci-dessus.

1. **Caractéristiques de la loi Bêta** (2 pts)
   (a) Calculer l'espérance et la variance de U.
   (b) Déterminer la médiane de U, le nombre m pour lequel $\mathbf{P}(U \leqslant m) = \mathbf{P}(U \geqslant m)$.

2. **Logarithme de la loi Bêta** (3 pts)
   On définit $V = -\ln(U)$. On souhaite déterminer la loi de V.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par V ?
   (b) Soit t une de ces valeurs. Déterminer la valeur de la fonction de répartition de V en t : $F_V(t) = \mathbf{P}(V \leqslant t)$.
   (c) En déduire que V suit la loi exponentielle de paramètre 2 : $V \sim \mathcal{E}(2)$.

3. **Théorème central limite** (6 pts)
   On souhaite estimer une probabilité pour un produit de variables de même loi Bêta.
   (a) Soient V_k des variables indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(2)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} V_k$. Énoncer le théorème central limite pour la variable S_n.
   (b) Estimer ainsi $\mathbf{P}(S_{50} \leqslant 28)$.

   Soient maintenant U_k des variables indépendantes de même loi Bêta et $P_n = \prod_{k=1}^{n} U_k$.
   (c) Estimer $\mathbf{P}\left((\frac{7}{4})^{50} P_{50} \geqslant 1\right)$.
   Indication : passer au logarithme et utiliser les résultats des questions 2-c et 3-b.
   (d) Déterminer une valeur de n à partir de laquelle $\mathbf{P}\left((\frac{7}{4})^{n} P_n \geqslant 1\right) \approx 0,95$.

4. **Couple de variables** (5 pts)
Soient X et Y deux variables indépendantes à valeurs dans $[0, +\infty[$. La variable X suit la loi d'Erlang de densité $f_X(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ et Y la loi exponentielle de densité $f_Y(y) = \mathrm{e}^{-y}$.
On pose $Z = \dfrac{X}{X+Y}$. On souhaite déterminer la loi de Z.
   (a) Soit $a > 0$.
   Représenter dans le quart de plan $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ le domaine $A = \{(x, y) \mid ax \leqslant y\}$.
   (b) Calculer à l'aide d'une intégrale double la probabilité $\mathbf{P}(aX \leqslant Y)$.
   (c) Quelles sont les valeurs prises par la variable Z ?
   (d) Déterminer, à l'aide de la question b, la fonction de répartition de Z.
   (e) En déduire que $Z \sim \boldsymbol{\beta}$.

5. **Variable discrète** (6 pts)
On considère une urne contenant initialement deux boules rouges et une boule bleue. À chaque étape, on tire une boule au hasard, puis on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur.
Par exemple, si on tire une boule rouge à la première étape, on la remet avec une autre boule rouge et l'urne contient alors trois boules rouges et une boule bleue. Puis on tire une nouvelle boule et ainsi de suite.
On note X_n la proportion de boules rouges dans l'urne au bout de n étapes. (Par exemple, X_0 est la variable constante égale à $\frac{2}{3}$.)
   (a) Représenter, à l'aide d'un arbre de probabilités les deux premières étapes du processus.
   (b) En déduire les lois de X_1 et X_2 et représenter leurs densités.
   (c) Justifier que pour tout n et tout $k \leqslant n$,
   $$\mathbf{P}\left(X_{n+1} = \frac{k+2}{n+4}\right) = \frac{n-k+1}{n+3}\mathbf{P}\left(X_n = \frac{k+2}{n+3}\right) + \frac{k+1}{n+3}\mathbf{P}\left(X_n = \frac{k+1}{n+3}\right).$$
   Cette formule permet de déterminer récursivement la loi de X_n. Nous n'allons pas le faire car la loi obtenue est difficile à utiliser dans les calculs. Nous allons admettre que lorsque n tend vers l'infini, la loi de X_n converge vers la loi $\boldsymbol{\beta}$.
   (d) Estimer ainsi la probabilité, qu'après un très grand nombre de tirages, plus de la moitié des boules de l'urne soient rouges.
   (e) Expliquer brièvement pourquoi il n'est pas possible d'appliquer ici le théorème central limite pour montrer que la loi des variables X_n converge vers une loi normale.

Rappels

- *La loi exponentielle de paramètre λ, notée $\mathcal{E}(\lambda)$ a pour densité, espérance et variance :*
$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ f(t) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbf{V} = \frac{1}{\lambda^2}.$$
- *Table de la loi normale centrée réduite : pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$*

α	*0*	*0.25*	*0.52*	*0.85*	*1.28*	*1.64*	*1.96*	*2.33*
$\mathbf{P}(X \leqslant \alpha)$	*0.5*	*0.6*	*0.7*	*0.8*	*0.9*	*0.95*	*0.975*	*0.99*

- *Soit $c \in \mathbf{R}$. On donne la primitive suivante :*
$$\int x\mathrm{e}^{-cx}\mathrm{d}x = -\frac{1}{c}x\mathrm{e}^{-cx} - \frac{1}{c^2}\mathrm{e}^{-cx}.$$