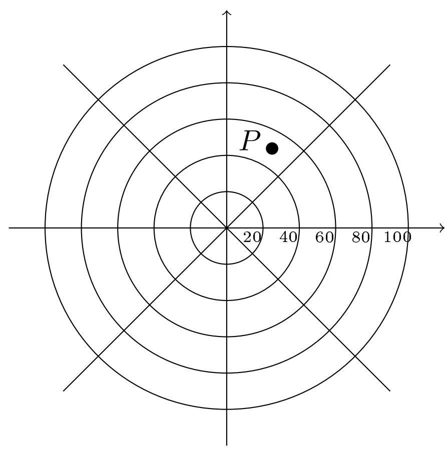
Devoir

Documents et calculatrice sont autorisés.

Exercice 1 : capteur de foudre (6 pts)

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante :



Le capteur détecte le point d'impact par ses coordonnées polaires (r, θ) où r est en km et θ est en degrés. Le point P capté est $P = (50, 60)$, ou encore, en notation complexe $P = 50\mathrm{e}^{60\mathrm{i}}$.

En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre. Notons $F = r\mathrm{e}^{i\theta}$ le vrai point d'impact.

Les erreurs entre les modules et les arguments de P et F sont modélisés par des variables gaussiennes indépendantes. Plus précisément, on considère que $|F|$ suit une loi normale de moyenne $|P|$ et variance 25 et $\arg(F)$ (en degrés) suit une loi normale de moyenne $\arg(P)$ et variance 56.

On souhaite déterminer la probabilité que le véritable point d'impact soit situé, sur notre figure, dans le même secteur que le point P.

1. Calculer la probabilité que r soit négatif. Interpréter.
2. Calculer la probabilité que $|\arg(F) - \arg(P)| > 180$. Interpréter.
3. Calculer la probabilité que r soit compris entre 40 et 60.
4. Calculer la probabilité que θ soit compris entre 45 et 90 degrés.
5. En déduire la probabilité que F soit dans le même secteur que P.

Exercice 2 : modèle d'épidémie (8 pts)

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine.

Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :
- soit de type S : il est susceptible d'être atteint par le virus ;
- soit de type M : il est atteint par le virus ;
- soit de type I : il est immunisé et ne peut plus être atteint par le virus.

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :
- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85% restent de type S, 5% deviennent malades et 10% deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65% restent malades et 35% sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On note S_n, M_n et I_n les proportions d'individus de type S, M et I en semaine n. En semaine 0, juste avant l'arrivée du virus, tous les individus étaient de type S, donc $S_0 = 1$, $M_0 = 0$ et $I_0 = 0$.

1. On considère un individu immunisé en semaine 2. Quelle est la probabilité qu'il ait été malade en semaine 1 ?
2. Soit $n \geqslant 0$. Exprimer S_{n+1}, M_{n+1} et I_{n+1} en fonction de S_n, M_n et I_n.
3. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout n, $M_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$.
5. En déduire l'évolution de l'épidémie : comment se comporte le nombre de malades au cours des semaines ? À long terme, dans quel état sera la population ?

Exercice 3 : couple de variables (6 pts)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. On s'intéresse à la variable $Z = \frac{Y}{X}$.

1. Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $\mathbf{P}(Z \leqslant t) = 1 - \frac{1}{t+1}$.
2. En déduire la loi de Z. Représenter sa densité.
3. Quelle est l'espérance de Z ?

Les exercices 1 et 2 sont tirés de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat général, session 2017.