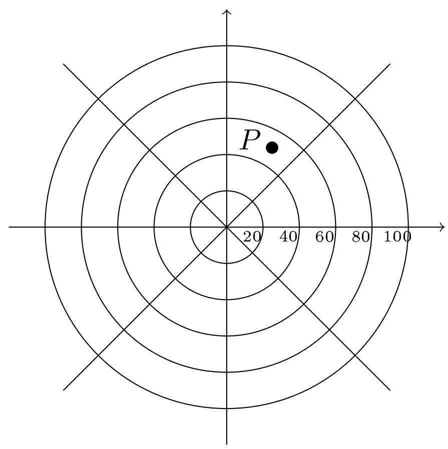
Corrigé du devoir

Documents et calculatrice sont autorisés.

Exercice 1 : capteur de foudre (6 pts)

Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante :



Le capteur détecte le point d'impact par ses coordonnées polaires (r, θ) où r est en km et θ est en degrés. Le point P capté est $P = (50, 60)$, ou encore, en notation complexe $P = 50\mathrm{e}^{60\mathrm{i}}$.

En raison d'imprécisions de mesures, le point d'impact affiché ne donne qu'une indication approximative du point d'impact réel de la foudre. Notons $F = r\mathrm{e}^{i\theta}$ le vrai point d'impact.

Les erreurs entre les modules et les arguments de P et F sont modélisés par des variables gaussiennes indépendantes. Plus précisément, on considère que $|F|$ suit une loi normale de moyenne $|P|$ et variance 25 et $\arg(F)$ (en degrés) suit une loi normale de moyenne $\arg(P)$ et variance 56.

On souhaite déterminer la probabilité que le véritable point d'impact soit situé, sur notre figure, dans le même secteur que le point P.

1. Calculer la probabilité que r soit négatif. Interpréter.

Par hypothèse, $r \sim \mathcal{N}(50, 25)$. Donc $\frac{r-50}{5} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi

$$\mathbf{P}(r < 0) = \mathbf{P}\left(\frac{r-50}{5} < -\frac{50}{5}\right) \approx F_{\mathcal{N}}(-10) \approx 0,00.$$

La probabilité que le module de F soit négatif est quasiment nulle, ce qui semble naturel. Notre modèle d'erreur avec la loi normale n'aboutit pas ici à une absurdité et n'est donc pas mis en défaut.

2. Calculer la probabilité que $|\arg(F) - \arg(P)| > 180$. Interpréter.

   Par hypothèse, $\arg(F) \sim \mathcal{N}(60, 56)$. Donc $\frac{\arg(F)-60}{\sqrt{56}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi

$$\mathbf{P}(|\arg(F) - \arg(P)| > 180) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{\arg(F) - \arg(P)}{\sqrt{56}}\right| > \frac{180}{\sqrt{56}}\right)$$

$$= 1 - \mathbf{P}\left(\left|\frac{\arg(F) - \arg(P)}{\sqrt{56}}\right| \leqslant \frac{180}{\sqrt{56}}\right) \approx 1 - (2F_{\mathcal{N}}(24.1) - 1) \approx 0,00.$$

   On souhaite a priori raisonner pour les arguments dans des intervalles de taille 360 et ainsi éviter des ambiguïtés d'angles définis modulo 360 degrés. Le fait qu'on obtienne une probabilité quasi nulle que l'écart entre $\arg(F)$ et $\arg(P)$ soit inférieure à 180 nous permet d'affirmer que l'argument de F est situé dans l'intervalle $[-130, 230]$. Pour la suite où on s'intéresse à la probabilité que l'argument soit compris entre 45 et 90 degrés, nous devrions normalement calculer la probabilité $\mathbf{P}(\arg(F) \in [45, 90])$ mais aussi les probabilités $\mathbf{P}(\arg(F) \in [405, 450])$, $\mathbf{P}(\arg(F) \in [-315, -270])$ et bien d'autres. D'après ce qui précède, la seule probabilité $\mathbf{P}(\arg(F) \in [45, 90])$ suffit.

3. Calculer la probabilité que r soit compris entre 40 et 60.

   Reprenons notre précédent raisonnement :

$$\mathbf{P}(40 < r < 60) = \mathbf{P}(-2 < \frac{r - 50}{5} < 2) \approx 2F_{\mathcal{N}}(2) - 1 \approx 0,955.$$

4. Calculer la probabilité que θ soit compris entre 45 et 90 degrés.

   Grâce à la remarque de la question 2, nous pouvons nous contenter de calculer $\mathbf{P}(\theta \in [45, 90])$. En reprenant le raisonnement de cette question :

$$\mathbf{P}(45 < \theta < 90) = \mathbf{P}(\frac{45 - 60}{\sqrt{56}} < \frac{\theta - 60}{\sqrt{56}} < \frac{90 - 60}{\sqrt{56}}) \approx F_{\mathcal{N}}(4.01) - F_{\mathcal{N}}(-2,00) \approx 0,977.$$

5. En déduire la probabilité que F soit dans le même secteur que P.

   Les variables r et θ sont supposées indépendantes. Ainsi la probabilité que F soit dans le même secteur que P est donnée par

$$p = \mathbf{P}(r \in [40, 60] \text{ et } \theta \in [45, 90]) = \mathbf{P}(r \in [40, 60])\mathbf{P}(\theta \in [45, 90]) = 0,955 \times 0,977 \approx 0,933.$$

Exercice 2 : modèle d'épidémie (8 pts)

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine.

Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :
— soit de type S : il est susceptible d'être atteint par le virus ;
— soit de type M : il est atteint par le virus ;
— soit de type I : il est immunisé et ne peut plus être atteint par le virus.

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

— Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85% restent de type S, 5% deviennent malades et 10% deviennent immunisés ;
— Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65% restent malades et 35% sont guéris et deviennent immunisés.
— Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On note S_n, M_n et I_n les proportions d'individus de type S, M et I en semaine n. En semaine 0, juste avant l'arrivée du virus, tous les individus étaient de type S, donc $S_0 = 1$, $M_0 = 0$ et $I_0 = 0$.

1. On considère un individu immunisé en semaine 2. Quelle est la probabilité qu'il ait été malade en semaine 1 ?

   Avant de commencer les calculs, il faut représenter les hypothèses à l'aide d'un arbre de probabilités. La probabilité recherchée est $\mathbf{P}(M_1 \mid I_2)$. D'après la formule de Bayes, $\mathbf{P}(M_1 \mid I_2) = \frac{\mathbf{P}(M_1)}{\mathbf{P}(I_2)}\mathbf{P}(I_2 \mid M_1)$. Avec les hypothèses :

   $$\mathbf{P}(M_1 \mid I_2) = \frac{0,05}{0,85 \cdot 0,10 + 0,05 \cdot 0,35 + 0,10 \cdot 1} \times 0,35 = 0,086.$$

2. Soit $n \geqslant 0$. Exprimer S_{n+1}, M_{n+1} et I_{n+1} en fonction de S_n, M_n et I_n.

   Toujours à partir de l'arbre :

   $$S_{n+1} = 0,85S_n, \quad M_{n+1} = 0,05S_n + 0,65M_n, \quad I_{n+1} = 0,10S_n + 0,35M_n + I_n.$$

3. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

   On reconnaît une suite géométrique pour S_n avec comme terme initial $S_0 = 1$. Ainsi $S_n = (0,85)^n S_0 = (0,85)^n$.

4. Montrer que pour tout n, $M_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$.

Le résultat se démontre par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a $M_0 = 0$ et on a bien $\frac{1}{4}(0,85^0 - 0,65^0) = 0$.
Supposons que pour un entier $n \geqslant 0$ on ait $M_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$. Alors

$$M_{n+1} = 0,05S_n + 0,65M_n = 0,05 \cdot (0,85)^n + 0,65 \cdot \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$$

$$= (0,05 + \frac{0,65}{4})(0,85)^n - \frac{1}{4}(0,65)^{n+1} = \frac{1}{4}(0,85)^{n+1} - \frac{1}{4}(0,65)^{n+1}.$$

On reconnaît l'expression voulue au rang $n+1$ et le résultat est bien démontré par récurrence.

5. En déduire l'évolution de l'épidémie : comment se comporte le nombre de malades au cours des semaines ? À long terme, dans quel état sera la population ?

   Le terme I_n se déduit de nos calculs précédents : on a pour tout n, $S_n + M_n + I_n = 1$, donc $I_n = 1 - S_n - M_n$.
   D'après nos résultats, la suite S_n converge vers 0 en décroissant et la suite M_n converge également vers 0 (avec une phase de croissance puis de décroissance). On en déduit que la suite I_n converge vers 1.
   On en conclut que la population tend à être intégralement immunisée contre la maladie.

Exercice 3 : couple de variables (6 pts)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. On s'intéresse à la variable $Z = \frac{Y}{X}$.

1. Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $\mathbf{P}(Z \leqslant t) = 1 - \frac{1}{t+1}$.

   On cherche la fonction de répartition de Z. Les variables X et Y sont à valeurs dans R_+. Donc Z est aussi à valeurs dans R_+. Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Alors

$$F_Z(t) = \mathbf{P}(Z \leqslant t) = \mathbf{P}(\frac{Y}{X} \leqslant t) = \mathbf{P}(Y \leqslant tX).$$

   On raisonne sur le couple de variables (X, Y) et on cherche la mesure de probabilités de l'ensemble $A = \{(x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2 \mid y \leqslant tx\}$. Cet ensemble peut se paramétrer sous la forme $A = \{(x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2 \mid 0 \leqslant x < +\infty \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant tx\}$. En utilisant le fait que X et Y sont indépendantes, la probabilité recherchée est

$$F_Z(t) = \iint_A f_X(x) f_Y(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{tx} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{-tx})\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{t+1}.$$

2. En déduire la loi de Z. Représenter sa densité.

   Pour obtenir la densité de Z, on dérive la fonction de répartition :

   $$f_Z(t) = F'_Z(t) = \frac{1}{(t+1)^2}.$$

3. Quelle est l'espérance de Z ?

   On calcule

   $$\mathbf{E}(Z) = \int_0^{+\infty} t f_Z(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t)^2}\mathrm{d}t.$$

   La fonction à intégrer est équivalente à $\frac{1}{t}$ en $+\infty$. Ce n'est pas une fonction intégrable et on en déduit que l'espérance de Z est donc infinie.