Devoir

Documents et calculatrice sont autorisés.

Exercice 1 : tirage en deux temps (6 pts)

Un joueur tire 2 cartes parmi un jeu de 32 cartes.

1. Quelle est la probabilité qu'il obtienne une paire d'as ?

   Après le premier tirage, le joueur peut conserver ses deux cartes ou bien en conserver une, jeter l'autre et en tirer une nouvelle dans le reste du paquet.

2. Quelle est désormais la probabilité de détenir finalement une paire d'as ?
   (On supposera le joueur assez intelligent pour ne pas jeter un as s'il en a.)
3. Toujours avec la même règle, quelle est la probabilité d'obtenir une paire de deux cartes de même valeur ?

Exercice 2 : test d'indépendance (16 pts)

On a programmé un générateur de nombres aléatoires permettant de simuler des tirages indépendants selon la loi uniforme sur $[0, 1]$. Le caractère uniforme des nombres tirés a été validé et nous souhaiterions vérifier statistiquement que les tirages successifs obtenus sont indépendants.

Nous noterons X et Y les résultats de deux tirages successifs de notre générateur. Nous considérons que ces variables suivent la même loi $\mathcal{U}([0, 1])$ (d'espérance $\frac{1}{2}$ et de variance $\frac{1}{12}$). Afin de vérifier expérimentalement qu'elles sont indépendantes, nous supposerons dans tout le problème qu'elles le sont et établirons alors des résultats théoriques que nous pourrons comparer aux résultats expérimentaux. Par exemple, on doit théoriquement avoir $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ et nous pouvons regarder si cela est validé par l'expérience.

Nous noterons $Z = XY$ le produit de nos deux variables.

I. **Espérance de Z (5 pts)**
   Nous l'avons dit, en supposant que X et Y sont indépendantes, on a

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

1. Démontrer que la variance de Z vérifie :

$$\mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y) + \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(Y)^2 + \mathbf{E}(X)^2\mathbf{V}(Y) = \frac{7}{144}.$$

Nous avons tiré 1000 couples de valeurs (X, Y) et avons calculé pour chacun le produit XY. La moyenne des 1000 nombres ainsi obtenus était égale à $0,263$.

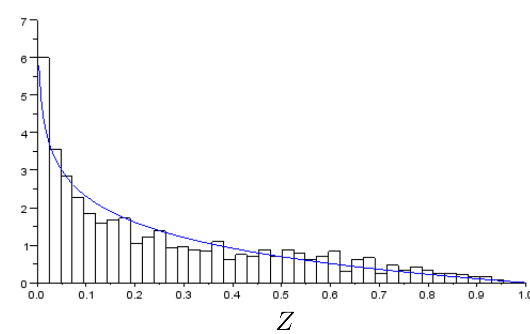
2. On note Z_1, $Z_2, \dots,$ Z_{1000} des tirages indépendants de même loi que Z et on note $M = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} Z_i$ leur moyenne. Énoncer le théorème central limite pour M.
3. Déterminer le nombre a pour lequel
$$\mathbf{P}(|M - \tfrac{1}{4}| < a) \approx 0,99.$$
4. La moyenne expérimentale de $0,263$ semble-t-elle très éloignée de la moyenne théorique de $\frac{1}{4}$? Peut-on avoir des doutes sur l'indépendance des variables X et Y ?

II. **Loi de Z (11 pts)**

Notre premier test ne porte que sur l'espérance de Z, nous aimerions un test plus précis portant sur la répartition des valeurs de Z. Commençons par déterminer la loi de Z.

1. Toujours en supposant les variables X et Y indépendantes, montrer que la fonction de répartition de Z est définie par :
$$\forall t \in [0, 1], \quad F_Z(t) = t - t\ln(t).$$
2. En déduire la densité de Z.

Nous avons représenté ci-contre cette densité ainsi que les 1000 valeurs de Z obtenues expérimentalement réparties dans un histogramme. On constate qu'elles se répartissent à peu près selon la densité théorique mais pas parfaitement. Nous allons maintenant essayer de savoir si les écarts observés sont significatifs.



3. Calculer la probabilité théorique $p = \mathbf{P}(Z > \frac{1}{2})$.
4. On effectue 1000 tirages de la variable Z et on note N le nombre de résultats supérieurs à $\frac{1}{2}$.
Quelle est la loi de N ? On précisera bien ses paramètres.
5. Estimer à l'aide du TCL le nombre b tel que $\mathbf{P}(N < b) \approx 0,99$.
6. Sur nos 1000 tirages, il y en avait 201 qui étaient supérieurs à $\frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire ?
7. Conclusion : d'après les résultats des deux parties, peut-on douter de l'indépendance des variables X et Y ? Si oui, essayer de préciser à partir de l'histogramme le lien de dépendance qu'il pourrait y avoir entre X et Y.

La méthode proposée dans ce problème n'est pas la méthode standard pour tester l'indépendance de deux variables. En général, on teste sur plusieurs parties A et B si on a bien $\mathbf{P}(X \in A$ et $Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B)$. Cette façon de faire s'automatise dans un test appelé test du χ^2.