Devoir

La calculatrice et les documents sont autorisés.
Toutes vos réponses doivent être soigneusement rédigées.
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 : jeu de dé (5 pts)

On considère le jeu suivant : on lance un dé ; si on obtient un 5 ou un 6, on gagne 2 et sinon on perd 1. Le jeu peut être répété autant de fois que l'on veut et les gains s'accumulent.

On souhaite comparer deux stratégies de jeu. La première stratégie consiste simplement à lancer 3 fois le dé. La seconde stratégie consiste à lancer le dé jusqu'à ce qu'on obtienne un 5 ou un 6 puis à s'arrêter de jouer.

On note G_1 (respectivement G_2) la variable aléatoire représentant le gain obtenu en suivant la stratégie 1 (respectivement 2).

Déterminer et représenter les densités des variables G_1 et G_2 puis calculer leur espérance et leur variance.

Conclure à partir de tous ces éléments : quelle est la stratégie la plus intéressante pour le joueur ?

On donne les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 9, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 45.$$

Exercice 2 : trajectoire aléatoire

On considère un point se déplaçant aléatoirement sur un intervalle de la manière suivante : chaque nouvelle position du point est choisie aléatoirement dans l'intervalle, indépendamment des positions précédentes. On souhaite décrire la distance parcourue par le point au bout d'un certain nombre d'étapes.

1. **Distance aléatoire (5 pts)**
   Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. On pose $Y = |X_2 - X_1|$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y et en déduire que sa densité est donnée par la fonction
   $$f_Y(x) = 2 - 2x \qquad \text{pour } x \in [0,1].$$
   (b) Calculer l'espérance et la variance de Y. *On doit trouver un écart-type* $\sigma_Y \approx 0,24$.

2. **Distance totale (5 pts)**
   On considère maintenant la trajectoire du point. Soient $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$: ce sont les positions du point au cours du mouvement. Pour $i \geqslant 1$, notons $Y_i = |X_{i+1} - X_i|$. Notons enfin $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ la distance parcourue par le point au bout de n étapes.
   (a) Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème central limite aux variables Y_i ?

   Nous allons tout de même appliquer illicitement ce théorème aux variables Y_i et nous verrons dans la partie suivante comment le faire rigoureusement.
   (b) Écrire le théorème central limite en faisant apparaître la variable S_n.
   (c) Pour $n = 60$, déterminer approximativement $\mathbf{P}(S_n \geqslant 17)$.
   (d) Pour $n = 120$, déterminer approximativement $\mathbf{P}(S_n \geqslant 34)$.
   (e) Pour $n = 150$, déterminer a tel que $\mathbf{P}(|S_n - 50| \leqslant a) \approx 0,95$.
   (f) Déterminer la valeur de n à partir de laquelle on peut affirmer que la distance parcourue est supérieure à 100 avec un risque d'erreur de 1%.

3. **Estimations rigoureuses (5 pts)**
   Les résultats obtenus dans la partie précédente sont faux à cause de l'utilisation erronée du théorème central limite. Nous allons ici établir des résultats plus rigoureux en nous appuyant toujours sur ce théorème.
   (a) Soient A et B des événements aléatoires. Montrer que $\mathbf{P}(A\cap B) \geqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 1$.
   (b) Séparer la somme S_n en deux sous-sommes de variables Y_i pour lesquelles le théorème central limite est applicable.
   (c) En utilisant un des calculs de la partie précédente, estimer de nouveau la probabilité $\mathbf{P}(S_n \geqslant 34)$ pour $n = 120$ et commenter.
   (d) Déterminer de même la valeur de n à partir de laquelle on peut affirmer que la distance parcourue est supérieure à 200 avec un risque d'erreur d'au plus 2%.