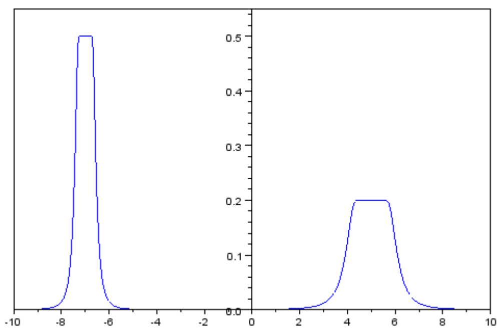
Corrigé du Devoir

Exercice 1 (4 points)

On considère une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est représentée ci-dessous.



Estimer graphiquement les nombres suivants :
- la probabilité $\mathbf{P}(X > 0)$: de l'ordre de 0,5.
- l'espérance $\mathbf{E}(X)$: de l'ordre de -1, -1,5.
- l'écart-type $\sigma(X)$: de l'ordre de 6.
- la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(X > -7 \mid X < -3)$: de l'ordre de 0,5.

.

Exercice 2 : guichets saturés (5 points)

On considère un centre d'appels avec n opérateurs. On note λ le taux d'appels, c'est-à-dire le nombre moyen d'appels par minute. Si $n+1$ personnes (ou plus) appellent durant un même laps de temps court, le centre sera saturé. On cherche à évaluer en fonction de n la probabilité de saturation.

Le temps écoulé correspondant à $n+1$ appels successifs est modélisé par la variable aléatoire T dont la densité est donnée par la loi d'Erlang :

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}}{(n-1)!}.$$

On considère $\lambda = \frac{1}{2}$ et $n = 2$ (sauf dans la question 4 où $n = 3$).

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

   f est une fonction positive et $\int f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4} t \mathrm{e}^{-t/2} = 1$ en utilisant la primitive donnée.

2. Calculer l'espérance de T.

$\mathbf{E}(T) = \int t f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4} t^2 \mathrm{e}^{-t/2} = 4$ minutes.

3. Compte tenu du temps moyen des appels et de l'attente possible des personnes, on estime que le centre est saturé si $n+1$ personnes appellent en moins de 2 minutes.
   Calculer la probabilité que le centre soit saturé.

   Le centre est saturé si 3 personnes appellent en moins de 2 minutes. Or T représente le temps correspondant à 3 appels. On cherche donc à estimer $\mathbf{P}(T \leq 2) = \int_0^2 f(t) dt = 1 - 2/e \approx 0.26$. Il y a donc 26% de chances que le centre soit saturé.

4. Calculer cette même probabilité avec $n = 3$ opérateurs. Comparer avec le résultat précédent.

   On recommence avec $n = 3$. Le centre est alors saturé si 4 personnes appellent en moins de 2 minutes. La probabilité associée est $\mathbf{P}(T \leq 2) = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 \frac{t^2 \mathrm{e}^{-t/2}}{16} = 1 - 5/2e \approx 0.08$. Il y a 8% de chances que le centre soit saturé. La présence d'un opérateur supplémentaire a fait diminuer le risque de saturation de façon conséquente.

<u>Primitives utiles</u> : $\displaystyle\int t\mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\lambda t} \left(-\frac{1}{\lambda^2} - \frac{t}{\lambda} \right), \quad \int t^2 \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\lambda t} \left(-\frac{2}{\lambda^3} - \frac{2t}{\lambda^2} - \frac{t^2}{\lambda} \right).$

Remarque : la loi d'Erlang est réellement utilisée pour déterminer le nombre d'opérateurs nécessaire pour le bon fonctionnement des centres d'appels.

Exercice 3 : assurances (9 points)

On considère un assureur qui dédommage à hauteur de 5000 euros les biens (voiture ou biens mobiliers par exemple) de ses assurés. On souhaite évaluer le montant de la prime d'assurance permettant au système d'assurance de fonctionner. Le modèle proposé considère que les accidents sont des évènements aléatoires et indépendants.

On suppose que pour le type de bien considéré, les ordres de grandeur (en euros) des sinistres et les probabilités que ceux-ci se produisent au cours d'une année sont donnés par le tableau suivant.

Valeur du sinistre	0	100	500	1000	2000	5000
Probabilités	0,95	0,03	0,01	0,005	0,003	0,002

Il y a N assurés. Pour chaque assuré i, on note X_i la valeur du sinistre qu'il a subi. La somme totale qu'aura remboursée l'assureur durant l'année est ainsi donnée par la variable $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

Enfin on note k la prime d'assurance en euros, c'est-à-dire ce que chaque assuré paye à l'assurance chaque année.

1. Calculer grâce au tableau $\mathbf{E}(X_i)$ et $\mathbf{V}(X_i)$.
   Indication : on doit obtenir un écart-type $\sigma(X_i) \approx 263$.

   $m = 29$ et $V = 68959$.

2. Écrire le théorème central limite pour la variable S.

   Les variables X_i sont iid. Si N est bien supérieur à 30, on peut appliquer le TCL et dire que $\frac{S-Nm}{\sigma\sqrt{N}}$ suit à peu près la loi $\mathcal{N}(0,1)$ avec $m = 29$ et $\sigma = 263$: $\frac{S-29N}{263\sqrt{N}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

3. Il y a $N = 5000$ assurés et la prime d'assurance est fixée à $k = 32$ euros.
   Évaluer la probabilité p que le bilan global sur l'année de l'assureur soit positif.

   Le bénéfice de l'opérateur est $kN - S$. On cherche la probabilité qu'il soit positif :

   $$\mathbf{P}(kN - S \geq 0) = \mathbf{P}(S \leq kN) = \mathbf{P}(\frac{S-29N}{263\sqrt{N}} \leq \frac{kN-29N}{263\sqrt{N}}) \approx F_{\mathcal{N}}(\frac{kN-29N}{263\sqrt{N}}).$$

   On obtient ainsi que la probabilité que le bilan soit positif est approximativement $F_{\mathcal{N}}(0,81) \approx 0.79$.

4. Avec $N = 5000$, déterminer la prime d'assurance que doit fixer l'assureur pour que p soit de l'ordre de $0,95$.

   Reprenons le calcul précédent : $\mathbf{P}(S - kN \geq 0) \approx F_{\mathcal{N}}(\frac{kN-29N}{263\sqrt{N}})$. On souhaite que cette probabilité soit égale à 0,95. On veut donc obtenir $F_{\mathcal{N}}(\frac{kN-29N}{263\sqrt{N}}) = 0,95$. Cela implique $\frac{kN-29N}{263\sqrt{N}} \approx 1,65$. Et pour $N = 5000$, on déduit $k \approx 35$ euros.

5. En maintenant la prime à 32 euros, déterminer le nombre N de personnes qu'il faudrait assurer pour avoir p de l'ordre de $0,95$.

   Le problème est le même que dans la question précédente. On veut avoir $F_{\mathcal{N}}(\frac{kN-29N}{263\sqrt{N}}) = 0,95$ donc $\frac{kN-29N}{263\sqrt{N}} \approx 1,65$. Pour $k = 32$ euros, on obtient $N \approx 20900$ assurés.