TD 1 : rappels.

Exercice 1 **Poker simplifié**

On tire 3 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelles sont les probabilités d'obtenir un brelan, une couleur, une paire, une suite, une suite couleur, rien ?

Exercice 2 **Test médical**

Une certaine maladie affecte une personne sur mille. On dispose d'un test pour détecter cette maladie. Le test est positif pour 99% des personnes effectivement malades mais est également positif pour $0,2\%$ des personnes saines.

1. Traduire les données en termes de probabilités.
2. Quelle est la probabilité d'être en bonne santé lorsque le test est négatif ?
3. Quelle est la probabilité d'être malade lorsque le test est positif ?
4. Le test est-il efficace ?

Exercice 3 **Loi uniforme dans le carré**

La loi uniforme sur $[0,1]$ est la distribution de probabilité définie sur $[0,1]$ par la fonction de densité $t \mapsto 1$.

On effectue deux tirages indépendants x et y de la loi uniforme. Soient a, b, c et d tels que $0 \leq a < b \leq 1$ et $0 \leq c < d \leq 1$.

1. Calculer $\mathbf{P}(a < x < b \text{ et } c < y < d)$.
2. En déduire que la probabilité d'un événement concernant le couple (x, y) est l'aire de la partie du carré $[0,1] \times [0,1]$ correspondant.
   Indication : on considèrera que toute partie raisonnable du carré peut se découper en rectangles.
3. Calculer pour $a, b > 0$ les probabilités suivantes :

$$\mathbf{P}(x \in [a,b] \text{ ou } y \in [a,b]), \qquad \mathbf{P}(x < y), \qquad \mathbf{P}(x^2 < y),$$

$$\mathbf{P}(x + y < a), \qquad \mathbf{P}(\frac{y}{x} < a), \qquad \mathbf{P}(x^2 + y^2 \leq 1).$$

Autres exercices

Exercice 4 On dispose de trois dés honnêtes dont les faces sont les suivantes :

$$\text{Dé } A : 4\ 4\ 4\ 4\ 1\ 1 \qquad \text{Dé } B : 5\ 5\ 2\ 2\ 2\ 2 \qquad \text{Dé } C : 6\ 6\ 3\ 3\ 0\ 0$$

Deux joueurs choisissent chacun un dé et le lancent. Celui qui obtient la plus grande valeur gagne.

Quelles sont les probabilités que le dé A batte le dé B, que le dé A batte le dé C et que le dé B batte le dé C ?

Un joueur a-t-il intérêt à choisir son dé en premier ou en deuxième ?

Exercice 5 **Paradoxe du chevalier de Méré**

A-t-on plus de chance d'obtenir un 6 avec 4 lancers de dés ou un double 6 avec 24 lancers de 2 dés ?

Exercice 6 **Tabac, alcool et santé**

On étudie l'influence du tabac et de l'alcool sur une certaine maladie M.

Une population de 1000 individus se répartit en huit groupes de la manière suivante ($F\bar{B}M$ désigne les individus qui fument, ne boivent pas et sont malades) :

FBM	$\bar{F}\bar{B}M$	$F\bar{B}M$	$\bar{F}BM$	$FB\bar{M}$	$F\bar{B}\bar{M}$	$\bar{F}\bar{B}\bar{M}$	$\bar{F}B\bar{M}$
20	20	80	80	100	100	300	300

1. La maladie est-elle liée au tabac ? Est-elle liée à l'alcool ?
2. Dans la population des fumeurs, y a-t-il un lien entre l'alcool et la maladie ?
3. Quelles sont les conclusions de cette étude ? Le tabac et l'alcool sont-ils dangereux ? Ont-il un effet sur la maladie lorsqu'ils sont combinés ?

Exercice 7 **Dénombrement de grilles de Morpion**

On considère le jeu de morpion (mais sans se préoccuper du déroulement du jeu). Les 9 cases d'une grille 3×3 vont être remplies par 5 croix et 4 ronds.

1. Combien y a-t-il de grilles différentes ?
2. Combien y a-t-il de grilles avec 3 ronds alignés (horizontalement, verticalement ou en diagonale) ?
3. Combien y a-t-il de grilles avec 3 ronds alignés et 3 croix alignées ?
4. Montrer que le nombre de grilles avec 3 croix alignées est égal à 98. (C'est plus pénible !)
5. En déduire le nombre de grilles sans vainqueur.

Exercice 8 On considère une pièce biaisée ayant une probabilité p de tomber sur Pile. Est-il plus facile d'obtenir au moins un Face en lançant la pièce deux fois ou d'obtenir au moins 2 Face en lançant la pièce 4 fois ?

TD 2 : variables aléatoires.

Exercice 9 **Station-service**

Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en millions de litres, est décrite par une variable aléatoire X de fonction de densité f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 5(1-x)^4$. Cela signifie que pour tous $0 < a < b < 1$, la probabilité que la demande soit comprise entre a et b est

$$\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

1. Représenter f et vérifier qu'elle définit bien une mesure de probabilité.
2. Quelle est la quantité hebdomadaire moyenne d'essence achetée dans cette station-service ?
3. La station-service dispose pour la semaine de 500000 litres d'essence. Quelle est la probabilité qu'il y ait pénurie d'essence ?
4. De quelle quantité d'essence doit disposer la station pour la semaine afin que la probabilité qu'il y ait pénurie soit inférieure à 0,0001 ?

Exercice 10 **Durée de vie d'un transistor**

Notons T la durée de vie d'un transistor. On considère que T est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Cette loi est la distribution de probabilité définie sur $\mathbf{R}_+$ par la fonction de densité $t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$:

$$\forall b \geqslant a \geqslant 0, \quad \mathbf{P}_T([a,b]) = \int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

1. Pour $t \geq 0$, calculer la probabilité que le transistor soit encore en vie à l'instant t. Vérifier que l'on a bien une distribution de probabilité.
2. Pour $t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0$, calculer $\mathbf{P}(T > t_2 \mid T > t_1)$.
3. Qu'en déduit-on sur la durée de vie du transistor ? Pourquoi dit-on que la loi exponentielle est une loi sans mémoire ?

Exercice 11 **Densités**

Représenter la densité des variables aléatoires suivantes puis répondre aux questions.

1. On lance deux dés équilibrés. La variable D représente la différence (en valeur absolue) des deux faces.
   Quelle est la probabilité que les faces soient égales ?
2. La variable M est le maximum des deux faces obtenues.
   Considérons maintenant le minimum m des deux faces. Montrer que $7 - m$ a la même densité que M et en déduire la densité de m.
3. Gains à la roulette : soit $a \in \{0, \ldots, 36\}$. On définit le gain $G = 35$ si le nombre tiré est a et $G = -1$ sinon.
4. On choisit un point au hasard uniformément dans le disque unité. On note d sa distance à l'origine.
   Préciser le hasard en question puis déterminer la fonction de répartition de d.
   Déterminer le plus petit intervalle $[a,b]$ tel que $\mathbf{P}(d \in [a,b]) = \frac{1}{2}$.

5. On pose $X = d^2 + 1$. Calculer $\mathbf{P}(X < \frac{3}{2})$.

Autres exercices.

Exercice 12 **Loi de Pareto.**

Soit X la variable aléatoire représentant le salaire mensuel brut d'un salarié (en milliers d'euros). On considère que cette variable suit (à peu près) une loi de Pareto de paramètre 2, c'est-à-dire que sa densité est donnée par

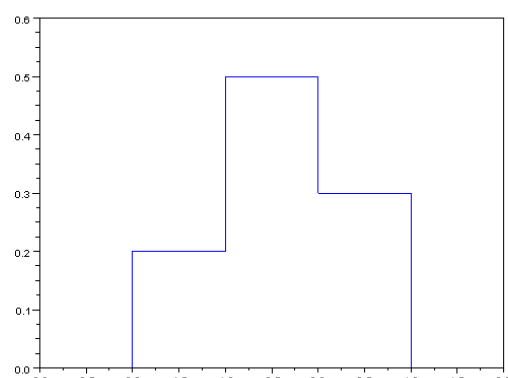
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de f et vérifier que c'est bien une densité de probabilité.
2. Soit $a > 1$. Calculer $\mathbf{P}(X > a)$.
3. Déterminer le salaire médian, c'est-à-dire la valeur m telle que $\mathbf{P}(X < m) = \mathbf{P}(X > m)$.
4. Soit $b > 1$. Calculer $\mathbf{P}(X > a + b | X > a)$.
   Montrer que cette probabilité croît avec a. Interpréter.

   On s'intéresse aux 25% de salariés les plus riches et on souhaite comparer leur richesse à celle de la population globale.
5. Déterminer α tel que $\mathbf{P}(X \geq \alpha) = \frac{1}{4}$. Que représente α ?
6. Calculer $\int_\alpha^{+\infty} x f_X(x) dx$.
7. Interpréter le rapport $\frac{\int_\alpha^{+\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x}{\int_1^{+\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x}$ en terme de répartition des revenus.

Exercice 13 Soit X une variable aléatoire de densité f_X représentée ci-contre.

1. Tracer la fonction de répartition de X.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$.
   Soit Y la variable aléatoire définie par
   $Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ 1 & \text{si } X > 0 \end{cases}$
3. Quelle est la loi de Y ?
4. Quelle est la loi de $(X|Y = 1)$?



TD 3 : espérance, variance, couple de variables.

Exercice 14 **Espérances et variances**

Reprendre l'exercice 11 et calculer l'espérance et la variance de chacune des variables. Vérifier que les résultats sont cohérents avec l'allure des densités.

Exercice 15 **Investissements**

On a le choix entre deux investissements indépendants dont l'évolution est incertaine. Ce que peut rapporter le premier est modélisé par une variable aléatoire X de densité définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2$ et le second est modélisé par une variable Y de densité définie sur $[-1, 2]$ par $g(y) = \frac{4}{9}(y - \frac{1}{2})^2$.

1. Représenter les deux densités et comparer les deux investissements.
2. Calculer leurs moyenne et écart-type.
3. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(X < Y)$. Quel est le meilleur choix ?

Exercice 16 **Tirs précis**

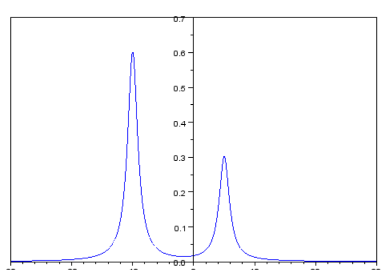
On tire sur une cible dont le cœur est au point $(0, 0)$. On note X et Y les coordonnées du point atteint. On suppose qu'il s'agit de variables aléatoires indépendantes de même densité $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{|x|}{4}$ définie sur $[-2, 2]$.
Interpréter graphiquement et calculer les probabilités suivantes :

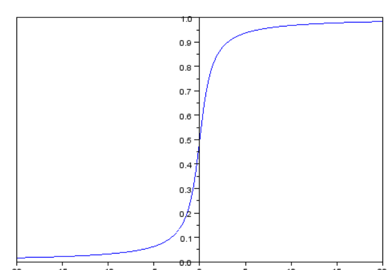
$$\mathbf{P}(|X| < 1 \text{ et } |Y| < 1), \qquad \mathbf{P}(|X| + |Y| < 1), \qquad \mathbf{P}(X^2 + Y^2 < 1).$$

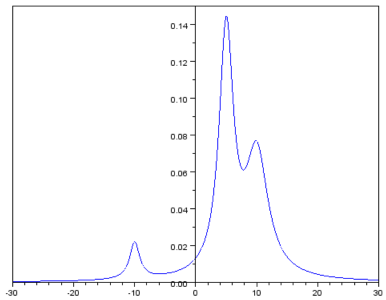
Recommencer en prenant pour densité définie sur $\mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2}$.
Utiliser les symétries des domaines et des densités pour simplifier les calculs. On donnera les valeurs numériques des probabilités et on vérifiera qu'elles sont cohérentes.

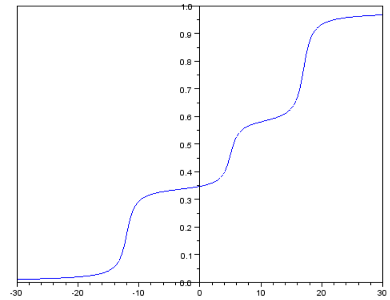
Autres exercices

Exercice 17 On donne ci-dessous des fonctions de densité et de répartition. Tracer pour chacune l'allure de la fonction de répartition (respectivement de densité) correspondante et évaluer grossièrement son espérance et son écart-type.









Exercice 18 Représenter chacune des fonctions suivantes, vérifier qu'il s'agit bien de densités de probabilité puis calculer leurs espérances et variances.

— $f_1(x) = 6x(1-x)$ pour $x \in [0,1]$;
— $f_2(x) = 3x^{-4}$ pour $x \in [1, +\infty[$ (loi de Pareto ou loi de puissance) ;
— $f_3(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbf{R}$ (loi de Cauchy).

Exercice 19 Donner la fonction de répartition, la densité, l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes.

1. On lance une pièce pipée n fois. La variable X représente le nombre de « piles »obtenus.
2. On tire indépendamment deux nombres a et b entre 0 et 1 selon la loi uniforme.
   — La variable aléatoire X_1 est le maximum de ces deux valeurs.
   — La variable X_2 vaut 2 si $a > b$, 0 si $a = b$ et -1 si $a < b$.
   — La variable X_3 vaut b si $a < \frac{1}{2}$ et vaut a sinon.
3. On tire un nombre x selon la loi exponentielle de paramètre λ. La variable X vaut x si $x > 1$, et vaut 0 sinon.

Exercice 20 Soit X une variable aléatoire. Démontrer que, si elle est bien définie, $\mathbf{E}\big((X-a)^2\big)$ est minimale pour $a = \mathbf{E}(X)$. Interpréter ce résultat.
Indication : on écrira l'expression sous la forme d'un polynôme de degré 2 en a.

Exercice 21 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On effectue n tirages indépendants d'une même variable aléatoire et on calcule la leur moyenne. Cela revient à considérer n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes et de même loi et à poser $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. On note m et σ^2 l'espérance et la variance des X_i.

1. Déterminer l'espérance et la variance de Y_n.
2. Qu'obtient-on lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite (Y_n) ?

TD 4 : lois usuelles.

Exercice 22 **Composants en série.**

Soient X et Y deux variables indépendantes de lois géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$. Soit $U = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de U.
   Indication : on commencera par chercher la fonction de répartition de U.
2. Deux composants électroniques ont des probabilités p et q de tomber en panne durant une journée. On les monte en série dans un circuit. Quelle est la probabilité que le courant soit coupé ? Quel est le rapport avec la question précédente ?
3. Refaire l'exercice en prenant des lois exponentielles de paramètres λ et μ. Comparer les résultats avec ceux obtenus ci-dessus.
4. Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier guichet (resp. au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 min (resp. 30 min). Deux clients rentrent simultanément, l'un choisit le guichet 1 et l'autre le guichet 2. En moyenne, après combien de temps sort le premier ?

Exercice 23 **rand/rand**

Avec la fonction *rand* d'un ordinateur, on tire deux nombres x et y entre 0 et 1. On calcule leur quotient $z = \frac{y}{x}$.

Déterminer la loi de z. Quelle est la probabilité que z soit inférieur à 2 ? À 0,5 ?

On pourra reprendre les résultats de l'exercice 3 et/ou raisonner sur la loi du couple (x, y).

Exercice 24 **Somme de lois normales**

Un grossiste fournit en viande hachée trois cantines. Il reçoit chaque matin leurs commandes. Ce sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales d'espérances respectives 55 kg, 65 kg et 30 kg, et d'écarts-type respectifs 4 kg, 10 kg et 3 kg. Calculer la quantité de viande dont le grossiste doit disposer pour que le risque de ne pouvoir satisfaire la demande soit inférieur à 5%.

Exercice 25 **Estimation de paramètres**

On suppose que la taille d'une certaine pièce fabriquée en usine de longueur théorique 86 mm suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Sur 100 pièces testées, 3 étaient trop petites (< 83 mm) et 5 étaient trop grandes (> 89 mm). Estimer à partir de ces données les valeurs de m et σ.

Exercice 26 **Loi binomiale**

On lance une pièce équilibrée 100 fois et on note X le nombre de piles obtenu. Donner les expressions exactes des probabilités suivantes puis les évaluer numériquement en utilisant l'inégalité de Markov ou celle de Bienaymé-Tchebychev puis le théorème central limite.

$$\mathbf{P}(X \leq 50), \quad \mathbf{P}(X > 40), \quad \mathbf{P}(|X - 50| \geq 5), \quad \mathbf{P}(50 \leq X \leq 60).$$

Autres exercices

Exercice 27 **Loi de Poisson et évènements rares.**

On a répertorié dans une usine le nombre d'accidents mineurs subis par le personnel dans une journée de travail sur une période de 200 jours. Ces accidents sont survenus indépendamment les uns des autres. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	86	82	22	7	2	1

(D'après le tableau il y a eu 86 journées sans accident et 7 journées avec 3 accidents.)

1. Quel est le nombre moyen d'accidents ?
2. Approcher la distribution par une loi de Poisson.
3. Quel est alors le nombre théorique de jours où il se produit moins de 3 accidents ? Comparer avec les valeurs réelles.

Exercice 28 **Taille**

La taille d'un homme de 25 ans suit une loi normale de moyenne 175cm et d'écart-type 6cm.

1. Quel est le pourcentage d'hommes ayant une taille supérieure à 1m85 ?
2. Parmi les hommes mesurant plus de 1m80, quelle proportion mesure plus de 1m92 ?

Exercice 29 **Loi log-normale**

Soient m, σ deux réels. On dit que X suit une loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si $Y = \ln(X)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On supposera dans la suite $m = 0$ et $\sigma = 1$.

1. Exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction de répartition $F_{\mathcal{N}}$ de la loi normale centrée réduite.
2. Calculer sa densité.
3. Démontrer que $\mathbf{E}(X) = \sqrt{\mathrm{e}}$. *On pourra utiliser le théorème de transfert.*

TD 5 : théorèmes limites.

Exercice 30 **Jeu de la boule**

Le jeu de la boule est au casino une version simplifiée de la roulette. Un joueur mise un euro sur un chiffre entre 1 et 9. Si son chiffre sort, il récupère 7 fois sa mise (il gagne donc 6 euros), sinon il perd sa mise. On note X_1 le gain du joueur après une partie.

1. Calculer $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{V}(X_1)$ (on trouve $\sigma_{X_1} \approx 2,20$).

   Un joueur effectue 10 parties de suite.

2. Sous quelle condition gagnera-t-il globalement de l'argent ?
3. En déduire que la probabilité p_{10} qu'il gagne de l'argent est égale à 0,307.
4. Retrouver une approximation de cette probabilité p_{10} en appliquant le théorème central limite. Commenter.
5. Le joueur effectue maintenant 100 parties. Donner une approximation de la probabilité p_{100} qu'il gagne de l'argent.

Exercice 31 **Nombre de clients à un guichet**

Des clients sont reçus les uns après les autres à un guichet SNCF. On note X_k le temps (en minutes) qu'a nécessité le traitement du k-ième client. On suppose que les variables X_k sont indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle $\mathcal{E}(\frac{1}{4})$.
Le guichet est ouvert dans une journée pendant un temps $T = 7h = 420mn$. On considère que la journée est satisfaisante si au moins 100 clients ont été servis.

1. Exprimer avec T et les variables $X_1, \ldots, X_{100}$ la probabilité p qu'une journée soit satisfaisante.
2. Évaluer cette probabilité en utilisant le théorème central limite.
3. Quelle devrait être la durée T d'ouverture du guichet pour que p soit proche de 0,90 ?

Exercice 32 **Surbooking**

Une compagnie possède un avion de 300 places. Pour chacun de ses vols, la compagnie fait du surbooking et vend n réservations avec $n > 300$. Ce principe repose sur le fait qu'un certain nombre de passagers se désistera. On suppose que chaque acheteur a une probabilité 0,1 de se désister et que les désistements sont indépendants les uns des autres. La compagnie souhaite que la probabilité qu'il y ait trop de passagers présents à l'aéroport pour le nombre de places disponibles soit inférieure à 0,01.

Déterminer la valeur optimale de n pour satisfaire cette condition.

Autres exercices.

Exercice 33 **Loi de Cauchy**

La loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ est la loi de densité $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$. On peut montrer que si X et Y sont des variables indépendantes suivant des lois de Cauchy de paramètres a et b, alors la variable $X+Y$ suit la loi de Cauchy de paramètre $a+b$.

Soient $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables i.i.d. de loi de Cauchy de paramètre 1. Quelle est la loi de la variable $Y_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$? Que peut-on dire quand n tend vers $+\infty$? Cela contredit-il la loi forte des grands nombres et le théorème central limite ?

Exercice 34 **Variante de l'inégalité de Markov**

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives admettant une densité f. On suppose que X admet une espérance m non nulle.

1. Démontrer que pour tout $\lambda > 0$, $P(X \geqslant \lambda m) \leq \frac{1}{\lambda}$.
2. On note q le 3-ième quartile de X, c'est-à-dire le nombre q tel que $F(q) = 3/4$, où F est la fonction de répartition de X. Démontrer que $q \leqslant 4m$.

Exercice 35 **Salles de cantine**

Lors de la construction d'un collège accueillant 500 élèves, il est prévu la construction d'une cantine comprenant deux salles, chacune disposant de N places. On fait l'hypothèse que chaque élève qui mange choisit au hasard et de façon équiprobable l'une des deux salles, indépendamment les uns des autres. Déterminer la valeur de N à prévoir pour que la probabilité que chaque élève trouve une place dans la salle qu'il a choisie soit supérieure à 0,99.

Exercice 36 **Loi de Poisson et TCL**

Soient X_1, X_2, etc, une suite de variables indépendantes de même loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

1. Montrer que $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(2)$.
2. En déduire la loi de $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
3. Appliquer le théorème limite central à la suite $(Xn)_n$ et en déduire que

$$\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \longrightarrow_{n\to+\infty} \frac{1}{2}.$$

Exercice 37 **Loi forte des grands nombres ?**

Soient X_i une suite de variables indépendantes de même loi $\mathcal{U}([0,1])$ et soit $Y_i = X_iX_{i+1}$.

1. Déterminer (de manière simple) l'espérance et la variance des variables Y_i.
2. Peut-on appliquer la loi forte des grands nombres aux variables Y_i ?
3. En séparant les termes pairs et impairs de la suite Y_i, montrer tout de même que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \longrightarrow \frac{1}{4}$.

Problèmes.

Exercice 38 **Théorie des jeux**

Deux joueurs possèdent chacun une pièce qu'ils peuvent truquer comme ils le souhaitent. On notera p la probabilité que la pièce du joueur 1 fasse "pile" et q la probabilité que la pièce du joueur 2 fasse "pile". Les deux joueurs lancent chacun leur pièce. Le vainqueur et la somme que doit lui remettre son adversaire sont décrits par le tableau ci-dessous.

			Joueur 2	
			q Pile	$1-q$ Face
Joueur 1	p	Pile	3	-4
	$1-p$	Face	-1	2

Tableau des gains du joueur 1

Ainsi, si les deux joueurs obtiennent "pile", le joueur 2 donnera 3 euros au joueur 1. Par contre, si le joueur 1 obtient "pile" et le joueur 2 "face", c'est le joueur 1 qui donnera 4 euros au joueur 2.
Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de p et q les plus avantageuses pour chacun des joueurs.

1. Montrer que l'espérance de gain du joueur 1 est donnée par $G_1(p,q) = 10pq-6p-3q+2$.
2. On pose $q=0$. Tracer la courbe de la fonction $p \mapsto G_1(p,0)$.
3. Tracer sur la même figure la courbe de la fonction $p \mapsto G_1(p,1)$.
4. Montrer qu'il existe une valeur p_0 de la variable p pour laquelle l'espérance de gain ne dépend pas de q. Donner la valeur de $G_1(p_0,q)$.
5. On note $G_2(p,q)$ l'espérance de gain du joueur 2. Exprimer $G_2(p,q)$ en fonction de $G_1(p,q)$.
6. Montrer qu'il existe une valeur q_0 de la variable q pour laquelle $G_2(p,q)$ ne dépend pas de p. Donner la valeur de $G_2(p,q_0)$.
7. Justifier, en sachant que chacun des joueurs essaie de maximiser son espérance de gain, qu'ils joueront avec des pièces de paramètres p_0 et q_0.
8. S'ils jouent un grand nombre de fois, quel joueur devrait probablement gagner de l'argent.

Exercice 39 **Entropie**

Si X est une variable aléatoire admettant une densité f, on appelle entropie de X la quantité suivante (si elle existe)

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(f(x))\mathrm{d}x.$$

Si X est une variable discrète dont les valeurs sont $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$, son entropie est donnée par

$$h(X) = -\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbf{P}(x_i)\ln(\mathbf{P}(x_i)).$$

L'entropie mesure la dispersion de la variable X. Plus la densité de X est « étalée », plus l'entropie est grande. Une variable prenant une seule valeur avec une probabilité 1 aura une entropie nulle.
Le but de cet exercice est de démontrer qu'à variance fixée, la loi de probabilité ayant la plus grande entropie est la loi normale. Cela justifie en partie que cette loi permette de modéliser les bruits.

1. Calculer l'entropie d'une variable de Bernouilli de paramètre p.
2. Pour quelles valeurs de p l'entropie est-elle maximale ou minimale ?
3. Calculer l'entropie de la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.
4. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Démontrer que

$$h(X) = \frac{1}{2}\left(1 + \ln(2\pi\sigma^2)\right).$$

5. On souhaite prouver que, parmi les variables aléatoires de variance donnée, les lois normales sont celles qui admettent une entropie maximale. On fixe donc Y une variable aléatoire centrée (d'espérance nulle), de densité f et de variance σ^2, admettant une entropie.
On note φ la fonction de densité de $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On supposera dans la suite que la fonction $x \mapsto f(x)\ln\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

Vérifier que $h(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\frac{\varphi(x)}{f(x)}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\varphi(x)\mathrm{d}x.$
En déduire que $h(Y) \leq \frac{1}{2}(1 + \ln(2\pi\sigma^2))$. Conclure.