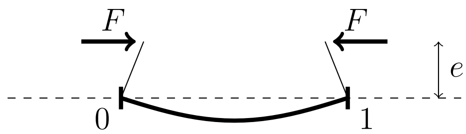
Stabilité

On considère une poutre de longueur 1 située entre les abscisses 0 et 1. Nous allons étudier son comportement lorsqu'elle est soumise à une compression latérale.

1. **Poutre comprimée excentriquement**

   On considère que la force de compression ne s'exerce pas directement sur la poutre mais légèrement au-dessus. On note e l'excentricité et on note $y(x,t)$ la hauteur de la poutre à l'abscisse x et à l'instant t.

   On a $y(0,t) = y(1,t) = 0$ et le comportement de la poutre est modélisé par une équation du type
   $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F(y+e) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$
   où F est une constante proportionnelle à la force de compression.

   (a) Déterminer la position à l'équilibre de la poutre, c'est-à-dire la solution $y(x)$ (indépendante de t) de l'équation satisfaisant les conditions aux bords.

   (b) La flèche de la poutre est la hauteur minimale de la poutre (elle est ici logiquement réalisée en $x = 0$). Donner l'expression de la flèche en fonction de e et F.

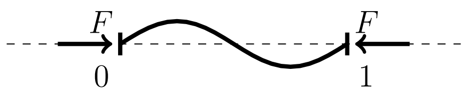
   (c) Pour e fixé, représenter le graphe de la flèche en fonction de F.

   (d) En déduire que si on augmente progressivement la force de compression, la poutre va se déformer continûment et finalement se briser.

   (e) Retracer le graphe de la flèche en fonction de F pour différentes valeurs de e. Qu'obtient-on si e tend vers 0 ?

2. **Poutre comprimée latéralement**

   On considère maintenant le cas $e = 0$ où les forces de compression s'exercent directement sur la poutre.

   (a) Déterminer la ou les positions à l'équilibre de la poutre. On montrera que pour certaines valeurs particulières de F, il y a plusieurs positions d'équilibre.

   (b) Comment devrait se comporter la poutre si on augmente progressivement la force de compression ?

   On ne se place plus à l'équilibre et on considère l'équation aux dérivées partielles initiale (avec $e = 0$). On souhaite tester la stabilité de la position d'équilibre $y = 0$. On imagine donc qu'on déforme légèrement la poutre et on étudie alors son évolution.

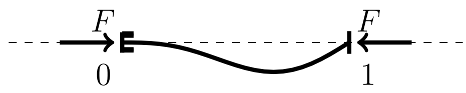
   (c) Montrer que l'équation admet une solution de la forme $y(x,t) = V(t)\sin(\pi x)$. La représenter à t fixé.

   (d) Déterminer l'expression de V satisfaisant $V'(0) = 0$.

   (e) En déduire l'existence d'un phénomène de bifurcation pour la stabilité de la position horizontale de la poutre.

3. **Poutre encastrée**

Afin de diminuer le risque de brisure de la poutre, on l'encastre en une de ses extrémités. Cela signifie qu'en cette extrémité, la poutre ne peut pas se plier. Mathématiquement, cela se traduit ainsi : $\forall t, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$.



Nous allons essayer d'intégrer cette condition à notre modèle et voir si cela a une influence sur la stabilité du système. Avant cela, nous allons résoudre complètement le problème précédent en considérant tous les modes de vibrations possibles de la poutre.

Un fonction raisonnable qui s'annule en $x = 0$ et $x = 1$ peut se décomposer en série de Fourier sous la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x)$. La solution générale du problème s'écrit donc sous la forme

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} V_n(t) \sin(n\pi x).$$

(a) Déterminer l'expression des fonctions V_n en fonction de n et F.

(b) Retrouver le fait que si F est inférieur à une certaine valeur seuil, la position horizontale de la poutre est stable.

(c) Ajouter la condition d'encastrement et en déduire qu'à tout instant une certaine série est nulle.

(d) Sans rentrer dans le détail mathématique, justifier qualitativement que si F est légèrement supérieur à la valeur seuil, la fonction V_1 est nécessairement nulle.

(e) En déduire que la stabilité de la poutre est assurée pour des valeurs de F supérieures à celles autorisées dans la partie précédente et donner la nouvelle valeur potentielle du seuil d'instabilité.