Contrôle 2

La calculatrice et les documents sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barème donné à titre indicatif : 4-8-8.

Exercice 1 : Transformée de Fourier de la fonction de Heaviside

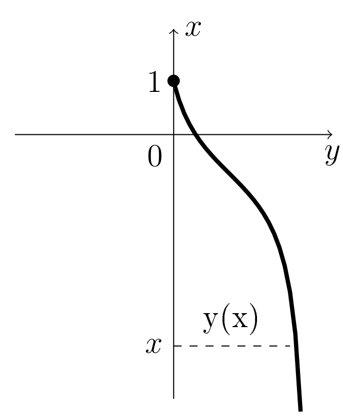
1. Soit $\mathbf{1}_{[-1,1[}$ la fonction porte qui vaut 1 sur $[-1,1[$ et 0 ailleurs. Montrer que sa transformée de Fourier est
$$\widehat{\mathbf{1}}_{[-1,1[}(t) = \frac{2\sin(t)}{t}.$$

   Soit maintenant la fonction u de Heaviside qui vaut 1 sur $\mathbf{R}_+$ et 0 sur $\mathbf{R}_-^*$. Sa transformée de Fourier n'est a priori pas définie mais elle l'est au sens des distributions. Nous allons la déterminer de manière formelle.
2. Justifier (éventuellement avec des graphes) que $u(x+1) - u(x-1) = \mathbf{1}_{[-1,1[}(x)$.
3. En déduire la transformée de Fourier $\hat{u}(t)$ de u pour $t \neq 0$.
4. Au sens des distributions, $u' = \delta_0$. La formule $\widehat{f'}(t) = it\widehat{f}(t)$ est-elle encore valable ici ?

Rappels : la transformée de Fourier d'une fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ par
$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}dx.$$
Pour a dans $\mathbf{R}$, si $g(x) = f(x+a)$, alors $\hat{g}(t) = e^{iat}\hat{f}(t)$.

Exercice 2 : Chaînette semi-libre

On considère une corde fixée au point $(0,1)$. Elle est homogène, de masse non négligeable et sa longueur importe peu. On souhaite décrire ses oscillations autour de l'axe vertical. (La situation est analogue à celle du pendule simple sauf que la corde est non rigide.)



On note $y(x,t)$ la distance (algébrique) de la corde à l'axe vertical à la hauteur x et à l'instant t. En supposant, entre autres, que la corde reste proche de l'axe vertical, son mouvement est décrit par une équation de la forme
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x},$$
et la condition au bord se traduit par : $\forall t, \quad y(1,t) = 0$.

1. Comment établirait-on l'équation aux dérivées partielles proposée ? Quelles sont en particulier les forces en présence ?

   On attend une réponse courte, sans calcul, ni expression mathématique.

2. Recherche des solutions stationnaires.

   On cherche les solutions particulières de la forme $y(x,t) = U(x)V(t)$. Elles correspondent aux modes propres de vibration de la corde.

   (a) Montrer que U est solution d'une équation différentielle de la forme

   $$xU''(x) + U'(x) - \lambda U(x) = 0,$$

   où λ est une constante réelle. On admet que nécessairement $\lambda < 0$.

   (b) On pose $W(x) = U(x^2)$. Montrer que W est solution d'une équation de la même forme que l'équation (E) décrite plus bas.

   (c) En déduire que U est de la forme

   $$U(x) = AJ_0(2\sqrt{-\lambda x}) + BY_0(2\sqrt{-\lambda x}).$$

   (d) En utilisant une condition implicite du problème puis la condition au bord, déterminer les solutions U associèes au problème.

   (e) Déterminer les solutions V et donner l'ensemble des solutions stationnaires associées au problème.

   (f) Représenter l'allure d'une de ces solutions.

3. On considère maintenant la présence d'un vent horizontal constant. L'équation des ondes devient alors

   $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + d,$$

   avec $d \in \mathbf{R}$.

   Déterminer la position à l'équilibre de la corde, c'est-à-dire la solution y indépendante de t, et la représenter.

   On remarquera que $y'(x)$ est solution de l'équation différentielle $xz'(x) + z(x) = -d$. On utilisera ensuite une condition implicite du problème et la condition au bord pour conclure.

Rappels : soit μ un réel négatif et (E) l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \mu y(x) = 0.$$

Alors les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme

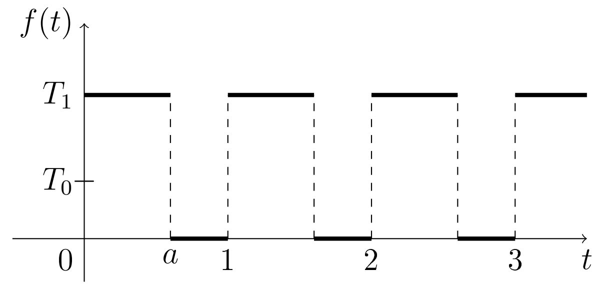
$$AJ_0(x\sqrt{-\mu}) + BY_0(x\sqrt{-\mu}),$$

où A et B sont des réels et J_0 et Y_0 désignent les fonctions de Bessel de première et seconde espèce.

Exercice 3 : Un problème de radiateur

On considère un espace semi-infini assimilable à la demi-droite $[0, +\infty[$ en contact en son bord $x = 0$ avec un milieu à 0°. Cet espace est initialement à la température T_0 et on aimerait, autant que possible, qu'il reste à une température supérieure à T_0. Pour cela, on introduit à intervalles réguliers une source de chaleur en $x = 0$.

Plus précisément, la température en $x = 0$ est donnée par la fonction f dont le graphe est ci-contre : elle alterne entre des phases de durée a à température T_1 et des phases de durée $1 - a$ à 0°. Le but du problème est de déterminer une valeur minimale de a permettant de maintenir, autant que possible, une température supérieure à T_0 dans l'espace.



1. Soit g une fonction telle que $\forall t > 0,\ g(t) \geq T_0$. Montrer que $\forall p > 0,\ L(g)(p) \geq \frac{T_0}{p}$.
   On en déduit par contraposée que si $\exists p,\ L(g)(p) < \frac{T_0}{p}$, *alors* $\exists t > 0,\ g(t) < T_0$.
2. Justifier que $f(t) = T_1 \sum_{n=0}^{+\infty}(u(t-n) - u(t-n-a))$, où u désigne l'échelon unité.
3. Montrer que la transformée de Laplace de f est donnée par
$$L(f)(p) = \frac{T_1}{p}\frac{1-e^{-ap}}{1-e^{-p}}.$$

   On note $T(x,t)$ la température en x à l'instant t.
   La condition initiale s'écrit : $\forall x > 0,\ T(x,0) = T_0$. Et l'évolution de T est donnée par l'équation de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$.

4. Passer à la transformée de Laplace en t dans l'équation de la chaleur et obtenir une équation différentielle en x satisfaite par $L(T)$.
   On s'autorisera à intervertir transformée et dérivée en x.
5. En déduire que $L(T)$ est de la forme
$$L(T)(x,p) = A(p)e^{-x\sqrt{p}} + B(p)e^{x\sqrt{p}} + \frac{T_0}{p}.$$

   On admet pour la suite que $B(p) = 0$.
6. Utiliser la condition au bord pour montrer
$$L(T)(x,p) = \left(\frac{T_1}{p}\frac{1-e^{-ap}}{1-e^{-p}} - \frac{T_0}{p}\right)e^{-x\sqrt{p}} + \frac{T_0}{p}.$$

7. Montrer que la limite en $p = 0$ de $\frac{1-e^{-ap}}{1-e^{-p}}$ est a.
8. En déduire que si $a < \frac{T_0}{T_1}$, alors pour tout $x > 0$, $L(T)(x,p) < \frac{T_0}{p}$ pour p assez petit. Qu'en déduit-on pour notre problème ?
9. Exprimer T à l'aide d'un produit de convolution.

10. Pour $T_0 = 1$, $T_1 = 3$ et $a = \frac{T_0}{T_1}$, nous avons représenté cette température T en fonction de x et t. Les graphes ci-dessous offrent plusieurs points de vue de cette fonction. Dans les deux derniers graphes, nous avons ajouté (en quadrillé) le plan à la hauteur constante égale à T_0.

    Décrire d'après ce graphe l'évolution de la température en différents points. A-t-on obtenu une solution correcte au problème posé ?

Formules utiles (dans l'ordre) : $L(g)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt.$

$$L(u(t-\lambda))(p) = \frac{e^{-\lambda p}}{p}, \qquad si\ x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

$$L(g')(p) = pL(g)(p) - g(0).$$

$$L(\lambda)(p) = \frac{\lambda}{p}, \qquad L\left(\frac{xe^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}\right)(p) = e^{-x\sqrt{p}}, \qquad L(g*h) = L(g)L(h).$$