Contrôle 2

La calculatrice et les documents sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barème donné à titre indicatif : 4-8-8.

Exercice 1 : Transformée de Fourier de la fonction de Heaviside

1. On calcule pour $t \neq 0$:

$$\widehat{\mathbf{1}}_{[-1,1[}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[-1,1[}(x) e^{-itx} dx = \int_{-1}^{1} e^{-itx} dx = [\frac{e^{-itx}}{-it}]_{-1}^{1} = \frac{2\sin(t)}{t}.$$

   Pour $t = 0$, on obtient $\widehat{\mathbf{1}}_{[-1,1[}(0) = 2$. La formule ci-dessus est donc valable pour tout t :

$$\widehat{\mathbf{1}}_{[-1,1[}(t) = \frac{2\sin(t)}{t}.$$

2. Pour $x \geq 1$, $u(x+1) - u(x-1) = 1 - 1 = 0$. Pour $x \in [-1, 1[$, $u(x+1) - u(x-1) = 1 - 0 = 1$. Et pour $x < -1$, $u(x+1) - u(x-1) = 0 - 0 = 0$. Ainsi, on obtient bien $u(x+1) - u(x-1) = \mathbf{1}_{[-1,1[}(x)$ pour tout x.
3. On passe à la transformée de Fourier dans cette égalité. Par linéarité, on obtient

$$\widehat{u(x+1)} - \widehat{u(x-1)} = \widehat{\mathbf{1}_{[-1,1[}}(x).$$

   Or, formellement, $\widehat{u(x+1)} = e^{ix\hat{u}(x)}$ et $\widehat{u(x-1)} = e^{-ix}\hat{u}(x)$. Ainsi

$$\hat{u}(x)(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{2\sin(t)}{t}.$$

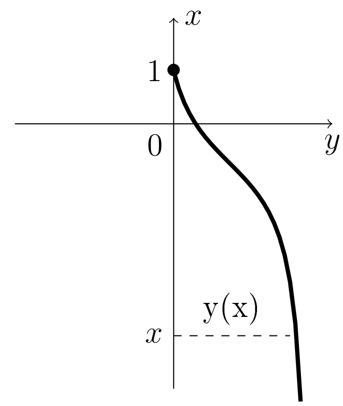
   On en déduit que pour $x \neq 0$,

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{it}.$$

   (Remarque : au sens des distributions, on a $\hat{u}(0) = \delta_0(0)$.)
4. Au sens des distributions, $u' = \delta_0$. Or $\hat{\delta}_0 = 1$ et $it\hat{u}(t) = 1$. La formule $\widehat{f'}(t) = it\widehat{f}(t)$ est donc encore valable ici.

Exercice 2 : Chaînette semi-libre

On considère une corde fixée au point $(0,1)$. Elle est homogène, de masse non négligeable et sa longueur importe peu. On souhaite décrire ses oscillations autour de l'axe vertical. (La situation est analogue à celle du pendule simple sauf que la corde est non rigide.)



On note $y(x,t)$ la distance (algébrique) de la corde à l'axe vertical à la hauteur x et à l'instant t. En supposant, entre autres, que la corde reste proche de l'axe vertical, son mouvement est décrit par une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x},$$

et la condition au bord se traduit par : $\forall t, \quad y(1,t) = 0$.

1. Pour établir cette équation, on peut effectuer un bilan des forces pour une portion infinitésimale de corde et appliquer le principe fondamental de la dynamique. Les forces en présence sont le poids et la tension de la corde. Les frottements de l'air semblent négligés dans l'équation proposée.

   Notons que le poids s'exerçant sur une portion de corde dépend de la position de la portion dans la corde.

2. <u>Recherche des solutions stationnaires.</u>

   On cherche les solutions particulières de la forme $y(x,t) = U(x)V(t)$. Elles correspondent aux modes propres de vibration de la corde.

   (a) On injecte $U(x)V(t)$ dans l'équation différentielle :

   $$U(x)V''(t) = xU''(x)V(t) + U'(x)V(t).$$

   Donc en séparant les variables

   $$\frac{V''(t)}{V(t)} = \frac{xU''(x) + U'(x)}{U(x)}.$$

   Ces deux fonctions dépendant de variables différentes, elles ne peuvent être égales que si elles sotn égales à une même constante λ. On obtient ainsi

   $$xU''(x) + U'(x) - \lambda U(x) = 0,$$

   où λ est une constante réelle. On admet que nécessairement $\lambda < 0$.

   (b) On pose $W(x) = U(x^2)$. Alors $W'(x) = 2xU'(x^2)$ et $W''(x) = 2U'(x^2) + 4x^2U''(x^2)$. Or, comme U est solution de l'équation différentielle ci-dessus, on a $x^2U''(x^2) + U'(x^2) - \lambda U(x^2) = 0$. En remplaçant par W, on obtient

   $$x^2W''(x) + W'(x) - 4\lambda W(x) = 0.$$

   On reconnaît l'équation E avec $\mu = 4\lambda$.

   (c) On rappelle que λ est négatif. On en déduit que W est de la forme

   $$W(x) = AJ_0(x\sqrt{-4\lambda}) + BY_0(x\sqrt{-4\lambda}).$$

   Or $U(x) = W(\sqrt{x})$, donc

   $$U(x) = AJ_0(2\sqrt{-\lambda x}\,) + BY_0(2\sqrt{-\lambda x}\,).$$

   (d) La solution recherchée doit avoir une limite en $x = 0$. Or Y_0 tend vers l'infini en 0, donc nécessairement $B = 0$. De plus, $y(1,t) = 0$ pour tout t. Cela implique $U(1) = 0$. Donc $U(1) = AJ_0(2\sqrt{-\lambda}) = 0$. Comme on cherche une solution non nulle, on veut $A \neq 0$ et cela implique donc que $2\sqrt{-\lambda}$ est un zéro de la fonction de Bessel J_0. Ainsi $2\sqrt{-\lambda} = \omega_k$ et $\lambda = -\frac{\omega_k^2}{4}$, où ω_k désigne un zéro de J_0. Ainsi, U est de la forme

   $$U(x) = AJ_0(\omega_k\sqrt{x}).$$

   (e) D'autre part, V est solution de $V''(t) - \lambda V(t) = 0$. Comme $\lambda < 0$, V est de la forme

   $$V(t) = C\cos(t\sqrt{-\lambda}) + D\sin(t\sqrt{-\lambda}).$$

   Les solutions stationnaires associées à notre problème sont donc les fonctions de la forme

   $$y(x,t) = J_0(\omega_k\sqrt{x})(C\cos(t\omega_k/2) + D\sin(t\omega_k/2)).$$

(f) Représenter l'allure d'une de ces solutions.

3. On considère maintenant la présence d'un vent horizontal constant. L'équation des ondes devient alors
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + d,$$
avec $d \in \mathbf{R}$.

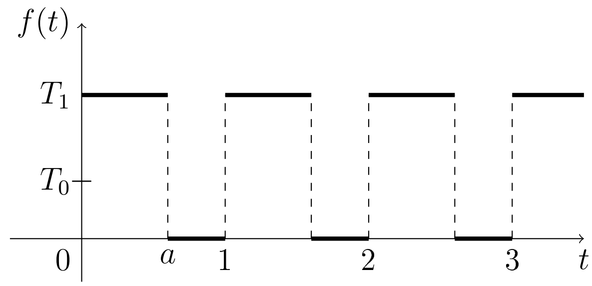
   À l'équilibre, $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ et donc $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$. On peut donc écrire $y(x,t) = y(x)$ et cette solution vérifie
$$0 = xy''(x) + y'(x) + d.$$
   Ainsi y' est solution de l'équation différentielle $xz'(x) + z(x) = -d$. Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme
$$\frac{\alpha}{x} - d,$$
   où α est un réel.
   Donc y' est l'une de ces fonctions, et en intégrant on obtient
$$y(x) = \alpha \ln(x) - dx + c,$$
   avec $c \in \mathbf{R}$.
   Or on cherche une solution ayant une limite en $x = 0$, donc $\alpha = 0$. D'autre part, on doit avoir $y(1) = 0$. Cela implique $c = d$. Ainsi, la position à l'équilibre de la corde soumise au vent est donnée par la fonction
$$y(x) = d - dx.$$
   Il s'agit d'une droite.

Rappels : soit μ un réel négatif et (E) l'équation différentielle
$$(E) \qquad y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \mu y(x) = 0.$$
Alors les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme
$$AJ_0(x\sqrt{-\mu}) + BY_0(x\sqrt{-\mu}),$$
où A et B sont des réels et J_0 et Y_0 désignent les fonctions de Bessel de première et seconde espèce.

Exercice 3 : Un problème de radiateur

On considère un espace semi-infini assimilable à la demi-droite $[0, +\infty[$ en contact en son bord $x = 0$ avec un milieu à 0°. Cet espace est initialement à la température T_0 et on aimerait, autant que possible, qu'il reste à une température supérieure à T_0. Pour cela, on introduit à intervalles réguliers une source de chaleur en $x = 0$.

Plus précisément, la température en $x = 0$ est donnée par la fonction f dont le graphe est ci-contre : elle alterne entre des phases de durée a à température T_1 et des phases de durée $1 - a$ à 0°. Le but du problème est de déterminer une valeur minimale de a permettant de maintenir, autant que possible, une température supérieure à T_0 dans l'espace.



1. Soit g une fonction telle que $\forall t > 0,\ \ g(t) \geq T_0$. Montrer que $\forall p > 0,\ L(g)(p) \geq \frac{T_0}{p}$.

$$L(g)(p) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt \geq \int_0^{+\infty} T_0 e^{-pt}dt = \frac{T_0}{p}.$$

On en déduit par contraposée que si $\exists p,\ L(g)(p) < \frac{T_0}{p}$, *alors* $\exists t > 0,\ g(t) < T_0$.

2. Justifier que $f(t) = T_1 \sum_{n=0}^{+\infty}(u(t-n) - u(t-n-a))$, où u désigne l'échelon unité.

Pour un entier n, la fonction $u(t-n)$ est la fonction qui vaut 1 à partir de n et $u(t-n-a)$ celle qui vaut 1 à partir de $n+a$. Ainsi la fonction $u(t-n) - u(t-n-a)$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[n, n+a[$. Comme f est la somme de ces indicatrices multipliées par T_1, l'expression de f est bien justifiée.

3. Montrer que la transformée de Laplace de f est donnée par

$$L(f)(p) = \frac{T_1}{p}\frac{1 - e^{-ap}}{1 - e^{-p}}.$$

$$L(f) = T_1 \sum_{n=0}^{+\infty} L(u(t-n)) - L(u(t-n-a)) = T_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-np}}{p} - \frac{e^{-(n+a)p}}{p} = \frac{T_1}{p}(1 - e^{-ap}) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-np}.$$

On reconnaît une somme géométrique qui vaut $\frac{1}{1-e^{-p}}$. Le résultat est ainsi démontré.

On note $T(x,t)$ la température en x à l'instant t.
La condition initiale s'écrit : $\forall x > 0,\ T(x, 0) = T_0$. Et l'évolution de T est donnée par l'équation de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$.

4. Passer à la transformée de Laplace en t dans l'équation de la chaleur et obtenir une équation différentielle en x satisfaite par $L(T)$.

Comme dans le cours, on obtient, en passant à la transformée de Laplace (en t)

$$pL(T)(p) - T(x, 0) = \frac{\partial^2 L(T)}{\partial x^2}(x, p).$$

En utilisant la condition initiale, on obtient que $L(T)$ est solution de l'équation différentielle en x

$$y''(x) - py(x) = -T_0.$$

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

5. En déduire que $L(T)$ est de la forme

$$L(T)(x,p) = A(p)e^{-x\sqrt{p}} + B(p)e^{x\sqrt{p}} + \frac{T_0}{p}.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme (il y a une solution particulière évidente)

$$y(x) = Ae^{-x\sqrt{p}} + Be^{x\sqrt{p}} + \frac{T_0}{p},$$

où A et B sont des constantes en x.
Ainsi $L(T)$ est de la forme

$$L(T)(x,p) = A(p)e^{-x\sqrt{p}} + B(p)e^{x\sqrt{p}} + \frac{T_0}{p}.$$

On admet pour la suite que $B(p) = 0$.

6. Utiliser la condition au bord pour montrer

$$L(T)(x,p) = \left(\frac{T_1}{p}\frac{1-e^{-ap}}{1-e^{-p}} - \frac{T_0}{p}\right)e^{-x\sqrt{p}} + \frac{T_0}{p}.$$

En $x = 0$, $T(0,t) = f(t)$ donc $L(T)(0,p) = L(f)(p)$. Ainsi

$$A(p) + B(p) + \frac{T_0}{p} = \frac{T_1}{p}\frac{1-e^{-ap}}{1-e^{-p}}.$$

Comme $B(p) = 0$, on obtient $A(p) = \frac{T_1}{p}\frac{1-e^{-ap}}{1-e^{-p}} - \frac{T_0}{p}$ et on obtient le résultat attendu.

7. Montrer que la limite en $p = 0$ de $\frac{1-e^{-ap}}{1-e^{-p}}$ est a.

Utilisons le développement limité de l'exponentielle en 0 : $e^{-x} = 1-x+o(x)$. Ainsi $1-e^{-ap}$ est équivalent à ap en $p = 0$ et $1-e^{p}$ est équivalent à p. Donc $\frac{1-e^{-ap}}{1-e^{-p}}$ est équivalent à $\frac{ap}{p}$. On en déduit que cette fraction tend vers a quand p tend vers 0.

8. En déduire que si $a < \frac{T_0}{T_1}$, alors pour tout $x > 0$, $L(T)(x,p) < \frac{T_0}{p}$ pour p assez petit. Qu'en déduit-on pour notre problème ?

Supposons $a < \frac{T_0}{T_1}$. Alors, d'après le résultat précédent, pour p assez proche de 0, $\frac{1-e^{-ap}}{1-e^{-p}}$ est proche de a et donc $\frac{1-e^{-ap}}{1-e^{-p}} < \frac{T_0}{T_1}$. On en déduit alors, que pour p assez petit, $L(T)(x,p) < (\frac{T_1}{p}\frac{T_0}{T_1} - \frac{T_0}{p})e^{-x\sqrt{p}} + \frac{T_0}{p} = \frac{T_0}{p}$.
D'après la question 1, on en déduit que pour tout x, il existe au moins un instant t tel que $T(x,t) < T_0$. On obtient ainsi une condition nécessaire pour que la température soit maintenue supérieure à T_0 dans la barre : il faut que a soit supérieur à T_0/T_1.

9. Exprimer T à l'aide d'un produit de convolution.

On peut écrire $L(T)$ sous la forme :

$$L(T) = (L(f) + T_0L(u))L(h) + T_0L(u),$$

où $h(x,t) = \frac{xe^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}$.
Ainsi, par transformée inverse, T est la fonction

$$T(x,t) = (f(t) + T_0u(t)) * h(t) + T_0u(t).$$

10. Pour $T_0 = 1$, $T_1 = 3$ et $a = \frac{T_0}{T_1}$, nous avons représenté cette température T en fonction de x et t. Les graphes ci-dessous offrent plusieurs points de vue de cette fonction. Dans les deux derniers graphes, nous avons ajouté (en quadrillé) le plan à la hauteur constante égale à T_0.

    Décrire d'après ce graphe l'évolution de la température en différents points. A-t-on obtenu une solution correcte au problème posé ?

    On retrouve bien en $x = 0$ le fait que la température y est donnée par la fonction f qui oscille entre les température 0 et T_1. On remarque que ces oscillations de température au cours du temps sont de plus en plus faibles quand on s'éloigne du bord de la barre. Pour x grand, la température semble se stabiliser à T_0.

    On remarque que la température n'est pas toujours supérieure à T_O. En effet, quand la température passe à 0 degrés en $x = 0$, la température est inévitablement faible au voisinage du bord. le problème est donc insoluble, il y aura toujorus des température trop faibles près du bord.

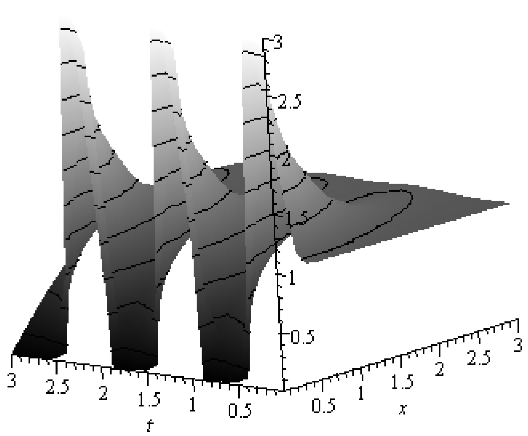
    Cependant, on remarque que loin du bord, la température est maintenue supérieure à T_0 et cela ne semble pas pouvoir changer. La solution semble donc correcte : il y aura toujours des variations fortes de température près du bord, mais dans le reste de la barre, la température est vite stable et reste supérieure à T_0.

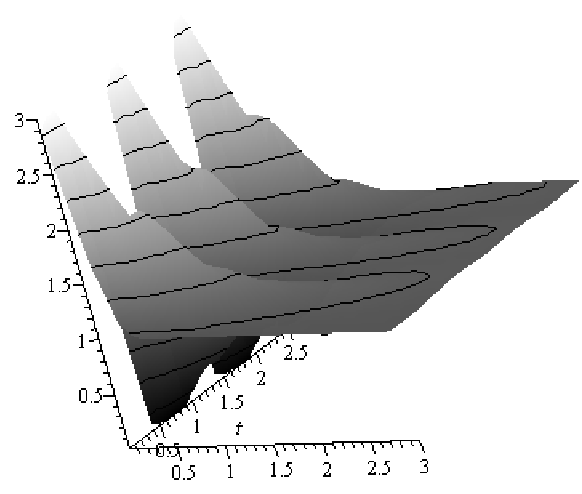
Formules utiles (dans l'ordre) : $L(g)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt.$

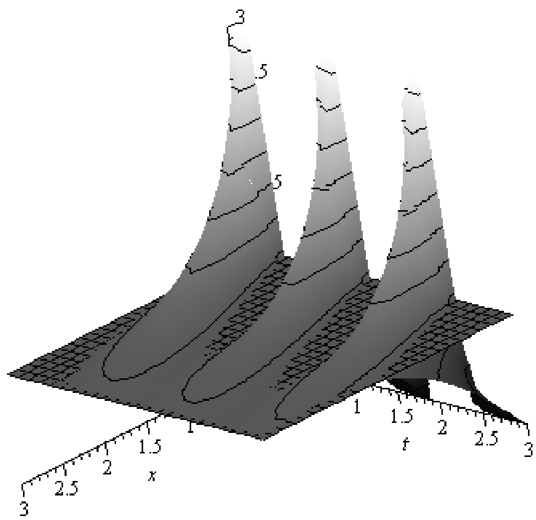
$$L(u(t-\lambda))(p) = \frac{e^{-\lambda p}}{p}, \qquad si\ x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

$$L(g')(p) = pL(g)(p) - g(0).$$

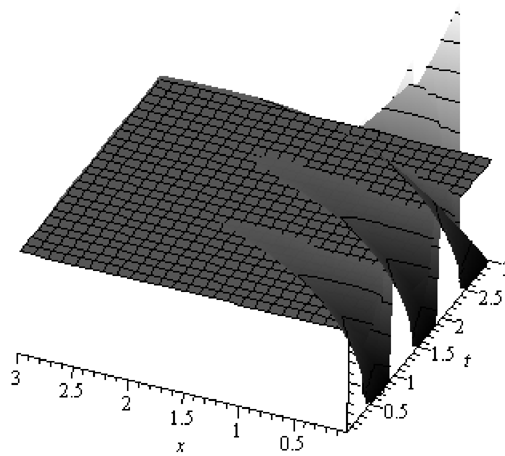
$$L(\lambda)(p) = \frac{\lambda}{p}, \qquad L\left(\frac{xe^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}\right)(p) = e^{-x\sqrt{p}}, \qquad L(g*h) = L(g)L(h).$$







3
.5
5
3
2.5
2
1.5
1
x
1
1.5
2
2.5
3
t



3
2.5
2
1.5
1
0.5
x
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t