

## CONTRÔLE 2

---

*Les documents et calculatrices sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées et rédigées clairement.*

### Exercice 1 : Transformée de Laplace

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + 2y' + 2y = g,$$

où  $g$  est une fonction continue par morceaux définie sur  $\mathbf{R}_+$  et admettant une transformée de Laplace.

On cherche la fonction  $f$  solution de (E) telle que  $f(0) = 1$ , et  $f'(0) = -1$ .

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).

*Nous allons maintenant résoudre le problème en utilisant la transformée de Laplace.*

2. Montrer que pour tout  $p > 0$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2+1} \mathcal{L}(g)(p).$$

3. Déterminer les fonctions  $r$  et  $s$  telles que  $\mathcal{L}(r)(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1}$  et  $\mathcal{L}(s)(p) = \frac{1}{(p+1)^2+1}$ .

4. En déduire l'expression de  $f$  en fonction de  $g$ .

5. Calculer  $f$  pour  $g$  définie sur  $\mathbf{R}_+$  par  $g(t) = e^{-t}$ .

*Rappels :*

*Le produit de convolution de deux fonctions  $f$  et  $g$  et la transformée de Laplace d'une fonction  $f$  sont donnés par*

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx, \quad L(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx.$$

*Quelques propriétés de la transformée de Laplace :*

$$L(f')(p) = pL(f)(p) - f(0^+), \quad L(f^{(n)})(p) = p^n L(f) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+),$$

$$L(f(t-a))(p) = e^{-ap}L(f)(p), \quad L(e^{-ax}f(x))(p) = L(f)(p+a), \quad L(f * g) = L(f)L(g),$$

$$L(1)(p) = \frac{1}{p}, \quad L(x^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L(e^{-ax}) = \frac{1}{p+a},$$

$$L(x^n e^{-ax}) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}, \quad L(\sin(\omega x)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad L(\cos(\omega x)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

## Exercice 2 : Équation des ondes amortie

On considère une corde vibrante de longueur 1. Si l'on souhaite tenir compte des frottements entre la corde et l'air, il faut ajouter un terme d'amortissement dans l'équation des ondes. Si on note  $y(x, t)$  la hauteur de la corde au point  $x$  et à l'instant  $t$ , l'équation s'écrit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial y}{\partial t} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

où  $a$  et  $\nu$  sont des constantes strictement positives. La corde étant fixée en ses extrémités, on a pour tout  $t$ ,  $y(0, t) = y(1, t) = 0$ .

Si  $a$  est strictement inférieur à  $\pi\nu$ , les solutions stationnaires sont les fonctions de la forme

$$y_k(x, t) = \sin(k\pi x) e^{-at} (B \cos(t\sqrt{k^2\pi^2\nu^2 - a^2}) + C \sin(t\sqrt{k^2\pi^2\nu^2 - a^2})),$$

où  $k$  est un entier positif et  $B$  et  $C$  sont des constantes réelles.

1. Vérifier que les fonctions ci-dessus sont bien des solutions du problème.
2. Représenter  $y_1(x, 0)$  en fonction de  $x$  puis l'évolution globale de la fonction  $y_1$  au cours du temps. Faire de même avec la fonction  $y_2$ .
3. On ajoute une condition initiale : à l'instant  $t=0$ , la hauteur de la corde vérifie

$$y(x, 0) = x(1-x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Déterminer alors la solution du problème.

*Rappels : les coefficients de Fourier  $b_n$  d'une fonction  $f$  2-périodique sont donnés par*

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx.$$

*D'autre part, pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ,*

$$\int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad \text{et} \quad \int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + 2 \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^3}.$$

## Exercice 3 : Ondelettes

On considère l'espace vectoriel  $L^2(\mathbf{R})$  des fonctions réelles  $f$  dont le carré est intégrable sur  $\mathbf{R}$ . On le munit du produit scalaire usuel et de sa norme associée :

$$\forall f, g \in L^2(\mathbf{R}), \quad \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx, \quad \|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx}.$$

On définit sur  $\mathbf{R}$  une fonction  $\psi$  et pour  $j$  et  $k$  dans  $\mathbf{Z}$  des fonctions  $\psi_{j,k}$  par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[ \\ -1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k).$$

La famille de fonctions  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbf{Z}}$  est appelé base d'ondelettes de Haar.

## 1. Base d'ondelettes

(a) Soient  $j$  et  $k$  dans  $\mathbf{Z}$ . Montrer que  $\psi_{j,k}$  est la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \text{si } t \in [\frac{k}{2^j}, \frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}[ \\ -2^{\frac{j}{2}} & \text{si } t \in [\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Représenter les 15 fonctions  $\psi_{j,k}$  pour  $j$  variant entre  $-1$  et  $2$  et  $k$  variant entre  $0$  et  $2^{j+1} - 1$ .

(c) Montrer que la famille  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbf{Z}}$  est une famille orthonormée de  $L^2(\mathbf{R})$ , c'est-à-dire que pour tous  $(j, k) \neq (j', k')$  dans  $\mathbf{Z}^2$ ,  $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = 0$  et  $\|\psi_{j,k}\| = 1$ .  
On pourra raisonner sur les supports de ces fonctions.

On admettra que cette famille forme une base<sup>1</sup> de  $L^2(\mathbf{R})$ . Ainsi, toute fonction  $f$  de  $L^2(\mathbf{R})$  peut se décomposer en une somme d'ondelettes sous la forme

$$f(t) = \sum_{(j,k) \in \mathbf{Z}^2} c_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

où les  $c_{j,k}$  sont des coefficients réels donnés par

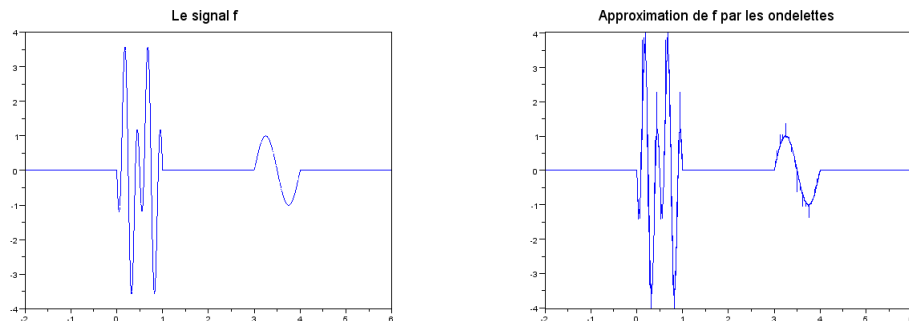
$$\forall j, k \in \mathbf{Z}, c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

Il est ainsi possible de recomposer un signal  $f$  en l'approchant par sa série en ondelettes. La particularité de cette décomposition est la suivante : alors que la décomposition en série de Fourier est une décomposition en fréquence, la décomposition en ondelettes est une décomposition en fréquence et en temps. C'est ce que nous allons observer.

## 2. Spectres en ondelettes.

On considère le signal  $f$  ci-dessous. On a calculé ses premiers coefficients d'ondelettes. Ils sont rangés dans le tableau joint au sujet. On peut alors approcher  $f$  par  $f(t) \approx \sum_{j=-1}^5 \sum_{k=-2^{j+1}}^{3 \times 2^{j+1}-1} c_{j,k} \psi_{j,k}(t)$ .

On obtient ici l'approximation ci-dessous.



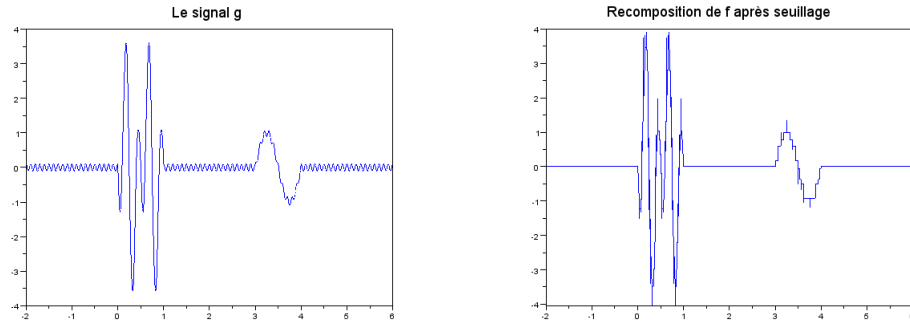
- (a) Quelles particularités de  $f$  retrouve-t-on dans le tableau de ses coefficients ? Le justifier sans effectuer explicitement de calculs.
- (b) Quel est l'intérêt ici de la décomposition en ondelettes ?

---

1. une base de Hilbert pour être précis

### 3. Débruitage.

On perturbe désormais notre signal en lui ajoutant un bruit. Ici, on s'est contenté d'ajouter la fonction  $\frac{1}{10} \cos(20\pi x)$  à notre signal  $f$ . On obtient le signal  $g$  suivant :



Notre objectif est de faire disparaître ce bruit et recomposer le signal  $f$  initial.

Avec les ondelettes, on utilise la méthode du seuillage. On calcule les coefficients d'ondelettes de  $g$  et on ne conserve que ceux dont la valeur absolue est supérieure à un certain seuil judicieusement choisi. Le tableau des coefficients restants ressemble alors beaucoup à celui de  $f$  et on obtient comme approximation la fonction ci-dessus.

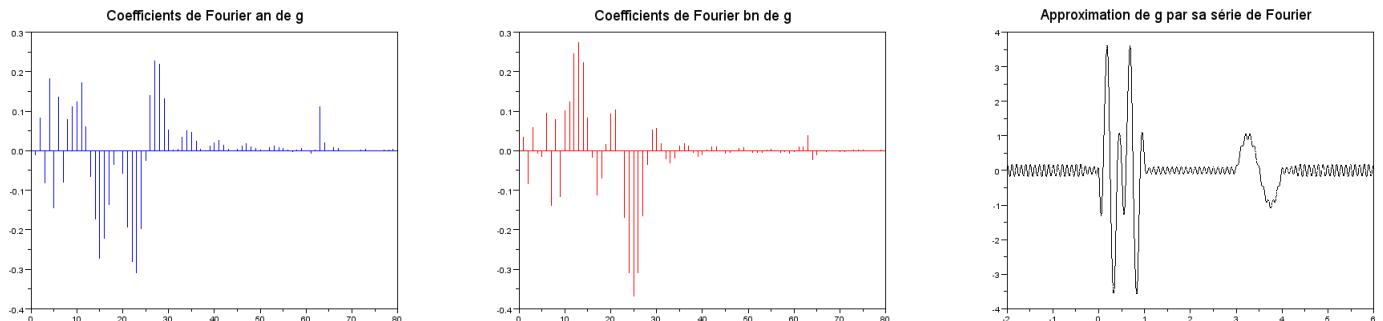
On constate que le bruit a en grande partie disparu mais que l'approximation est tout de même un peu moins bonne que la précédente.

- (a) Toujours sans détailler les calculs, essayer d'expliquer pourquoi cette méthode a bien permis de supprimer le bruit.

### 4. Comparaison avec le spectre de Fourier.

Regardons maintenant ce que l'on obtient avec la décomposition en série de Fourier. Voici ci-dessous les premiers coefficients de Fourier réels  $a_n$  et  $b_n$  de la fonction  $g$ , ainsi que l'approximation de  $g$  par sa série de Fourier tronquée :  $g(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{80} (a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx))$ .

- (a) Peut-on facilement décrire le signal  $g$  à partir de ces spectres ? Pourquoi ?
- (b) Quelle information peut-on tout de même lire ici ?
- (c) Comment pourrait-on à partir du spectre de  $g$  supprimer le bruit ?



*Il existe d'autres familles d'ondelettes bien plus subtiles que celle présentée ici. Les ondelettes ont été développées dans les années 80 d'abord par un ingénieur du domaine pétrolier puis par des chercheurs en mathématiques. Elles constituent un outil mathématique très utilisé aujourd'hui, notamment dans les problèmes de compression de données et sont entre autres à la base du système de compression d'image JPEG 2000.*