Contrôle 1

Exercice 1 : Équation de la chaleur

On considère une tige métallique de longueur 1 en contact à ses extrêmités avec des milieux à 0°. À l'instant initial, la tige est également à température nulle. On suppose de plus la présence d'une source de chaleur permanente. Elle est représentée dans l'équation de la chaleur par la constante C.
Les données du problèmes s'écrivent alors ainsi :

$$\text{Équation de la chaleur :} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + C \tag{1}$$

$$\text{Conditions au bord :} \quad \forall t > 0 \;\; T(0,t) = 0 \;\text{ et }\; T(1,t) = 0 \tag{2}$$

$$\text{Condition initiale :} \quad \forall x \in]0,2[\;\; T(x,0) = 0 \tag{3}$$

1. Montrer que $T_L(x,t) = \dfrac{Cx(1-x)}{2}$ est la seule solution aux équations 1 et 2 qui soit indépendante de t.
2. Soit T la solution du problème. On pose $\tilde{T} = T - T_L$.
De quelle équation aux dérivées partielles $\tilde{T}$ est-elle solution ? Donner les conditions au bord et la condition initiale pour $\tilde{T}$.
3. En déduire l'expression de $\tilde{T}$ puis celle de T.
4. Représenter l'évolution de la température dans la tige au cours du temps.

Rappels : Pour une barre de longueur L en contact à ses deux extrêmités avec des milieux à 0° et dont la température initiale est donnée par une fonction T_0, sa température T est solution du système d'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad \forall t > 0 \;\; T(0,t) = 0 \;\; et \;\; T(L,t) = 0, \qquad \forall x \in]0,L[\;\; T(x,0) = T_0(x),$$

et l'unique solution est donnée par

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\frac{k\pi}{L}x) e^{-t(\frac{k\pi}{L})^2} \quad avec\ pour\ tout\ k, \;\; A_k = \frac{2}{L}\int_0^L T_0(x)\sin(\frac{k\pi}{L}x)dx.$$

On pourra de plus utiliser les résultats suivants :

$$\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad et \quad \int_0^1 x^2 \sin(n\pi x)dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + 2\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^3}.$$

Exercice 2 : Transformée de Laplace et théorie du signal

On considère un signal entrant e transformé en un signal sortant $s = e * h$, où h est la fonction de transfert définie par $h(t) = \cos(t)$.
On a reçu le signal $s(t) = t$. Retrouver le signal e en utilisant la tranformée de Laplace.

Quelques tranformées de Laplace classiques :
- $L(t^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
- $L(e^{-at})(p) = \frac{1}{p+a}$
- $L(\sin(\omega t))(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
- $L(\cos(\omega t))(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$

Exercice 3 : Équation des ondes amortie

On considère une corde vibrante de longueur 1. Si l'on souhaite tenir compte des frottements entre la corde et l'air, il faut ajouter un terme d'amortissement dans l'équation des ondes. Si on note $y(x,t)$ la hauteur de la corde au point x et à l'instant t, l'équation s'écrit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

où a est une constante strictement positive. La corde étant fixée en ses extrêmités, on a pour tout t, $y(0,t) = y(1,t) = 0$.
Le but de cet exercice est de trouver les solutions stationnaires de ce problème.

Soit y une solution de la forme $y(x,t) = U(x)V(t)$. On suppose que y n'est pas la fonction nulle.

1. Montrer qu'il existe une constante λ telle que $U'' = \lambda U$. Donner l'équation différentielle satisfaite par V.

   Avec les conditions au bord, on sait démontrer que λ est nécessairement de la forme $\lambda = -(k\pi)^2$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ et que U est de la forme $U(x) = A\sin(k\pi x)$ avec $A \in \mathbf{R}$.
2. Déterminer les solutions V correspondant aux différentes valeurs possibles de λ.
   Attention, il faut distinguer des cas en fonction du signe de $a^2 + \lambda$.
3. Donner l'ensemble des solutions stationnaires.
4. Comment évoluent ces solutions en fonction du temps ?

Exercice 4 : Transformée de Fourier et diffraction de la lumière

On dispose d'une plaque dans laquelle on a découpé des fentes verticales et d'un écran situé à une grande distance de la plaque. On projette de la lumière sur la plaque et on regarde l'écran. On y observe une figure due à la diffraction de la lumière : l'intensité de la lumière varie horizontalement.
En faisant quelques approximations, on peut montrer que l'intensité de la lumière sur l'écran est proportionnelle à la fonction

$$I(x) = \left| \frac{1}{2\pi} \int_F e^{-itx} dt \right|^2,$$

où l'ensemble F est une réunion d'intervalles représentant les différentes fentes.
On reconnaît la transformée de Fourier de la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Soit $a > 0$. On considère la fente de largeur $2a$ centrée en 0, *i.e.* on considère la fonction $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-a,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer la transformée de Fourier de f et exprimer le résultat avec la fonction sinus.
2. Représenter la fonction I correspondante. Comment se répartit la lumière sur l'écran si on prend une fente de plus en plus étroite ?
3. On considère maintenant deux fentes de largeurs $2a$ situées en $[-4a, -2a]$ et $[2a, 4a]$. Montrer que l'intensité I est proportionnelle à la fonction

$$\left| \frac{\sin(4x) - \sin(2x)}{x} \right|^2.$$

4. Représenter cette fonction I et décrire ce que l'on observe sur l'écran.