Corrigé du contrôle 2

Exercice 1 : Équation de la chaleur

1. Soit T une solution du problème indépendante de la variable t. Donc T est une fonction de la seule variable x et $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Or T doit satisfaire l'équation **??**, donc $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + C = 0$, *i.e.* $T'' = -C$. On intègre cette équation : $T'(x) = -Cx + A$, où A est une constante, puis $T(x) = -C\frac{x^2}{2} + Ax + B$, où B est une constante. D'autre part, T doit vérifier les équations de (2). Donc $T(0) = B = 0$ et $T(1) = -\frac{C}{2} + A + B = 0$. Donc $B = 0$, $A = \frac{C}{2}$ et finalement T est la fonction définie par $T(x) = -\frac{C}{2}x^2 + \frac{C}{2}x = T_L(x)$. Enfin, d'après ce qui précède, T_L vérifie clairement les équations (1) et (2). Donc T_L est la seule solution indépendante de t.
2. Les fonctions T et T_L vérifient l'équation (1) : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + C$ et $\frac{\partial T_L}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} + C$. Donc, en soustrayant la deuxième équation à la première, $\frac{\partial T - T_L}{\partial t} = \frac{\partial^2 T - T_L}{\partial x^2} + C - C$, *i.e.* $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2}$. Donc $\tilde{T}$ est solution de l'équation de la chaleur classique (sans source de chaleur).

   Conditions au bord : $\forall t, \tilde{T}(0,t) = T(0,t) - T_L(0,t) = 0 - 0 = 0$ et $T(1,t) = T(1,t) - T_L(1,t) = 0 - 0 = 0$.
   Condition initiale : $\forall x, \tilde{T}(x,0) = T(x,0) - T_L(x,0) = 0 - \frac{Cx(1-x)}{2} = \frac{Cx(x-1)}{2}$.
3. Nous en déduisons que $\tilde{T}$ vérifie toutes les conditions du problème classique et nous connaissons sa valeur initiale. Nous pouvons donc conclure (avec $L = 1$)

   $$\tilde{T}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(k\pi x) e^{-t(k\pi)^2}$$

   avec $\forall k \geq 1, A_k = 2\int_0^1 \frac{Cx(x-1)}{2}\sin(k\pi x)dx$. Calculons les coefficients A_k :
   $A_k = C\int_0^1 x^2 \sin(k\pi x)dx - C\int_0^1 x\sin(k\pi x)dx = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + 2\frac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^3} - \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} = 2\frac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^3}$.
   Donc

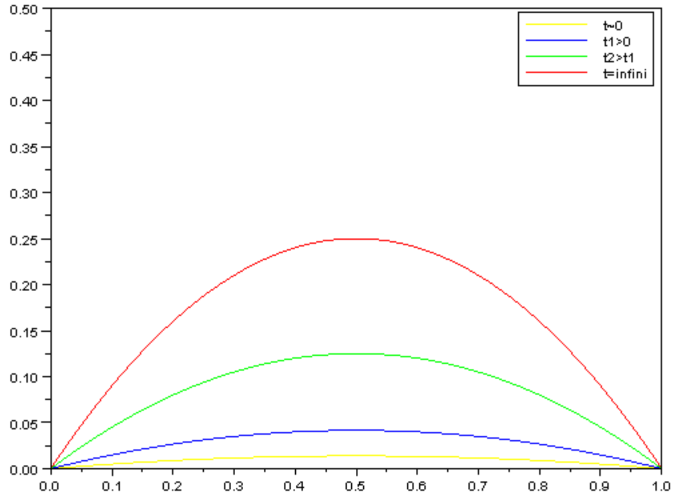
   $$\tilde{T}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^3}\sin(k\pi x)e^{-t(k\pi)^2}$$

   et

   $$T(x,t) = \tilde{T}(x,t) + T_L(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^3}\sin(k\pi x)e^{-t(k\pi)^2} + \frac{Cx(1-x)}{2}.$$
4. Quand t tend vers $+\infty$, on sait que $\tilde{T}(x,t)$ converge vers 0 pour tout x (à cause de l'exponentielle). Donc pour tout $x \in [0,1]$,

   $$\lim_{t \to +\infty} T(x,t) = \frac{Cx(1-x)}{2}.$$

   Autrement dit, la température, initialement nulle, croît dans la barre jusqu'à ce qu'elle se répartisse selon une parabole renversée. Les extrêmités de la barre restent bien à température nulle, mais à cause de la source de chaleur, la température a augmenté dans le coeur de la barre.



Répartition de la température dans la barre à différents instants. À l'instant initial, la température est nulle partout. Puis elle croît pour atteindre une répartition limite représentée par la courbe rouge.

Exercice 2 : Transformée de Laplace et théorie du signal

Appliquons la transformée de Laplace à l'équation $s = e * h$: $L(s) = L(e) \times L(h)$. Or $L(s)(p) = \frac{1}{p^2}$ et $L(h)(p) = \frac{p}{p^2+1}$. Donc pour tout p,

$$\frac{1}{p^2} = L(e)(p) \times \frac{p}{p^2+1}.$$

On en déduit que

$$L(e)(p) = \frac{p^2+1}{p^3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}.$$

On souhaite désormais appliquer la transformée de Laplace inverse à cette équation. On reconnaît les transformées $L(1)(p) = \frac{1}{p}$ et $L(\frac{t^2}{2})(p) = \frac{1}{p^3}$. Donc le signal e est donné par

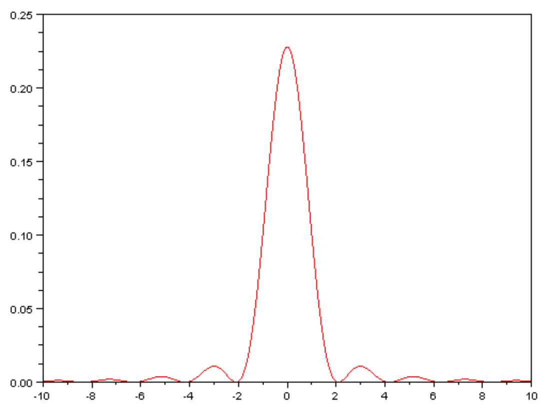
$$e(t) = 1 + \frac{t^2}{2}.$$

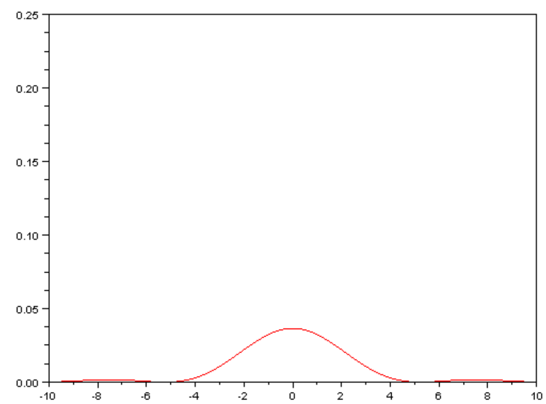
Exercice 3 : Équation des ondes amortie

1. Appliquons l'équation des ondes à la fonction $y(x,t) = U(x)V(t)$: $U(x)V''(t)+2aU(x)V'(t) = U''(x)V(t)$. Donc $\frac{V''+2aV'}{V}(t) = \frac{U''}{U}(x)$. On obtient ainsi une égalité entre deux fonctions de variables distinctes. Ces fonctions sont donc nécessairement constantes : $\frac{V''+2aV'}{V}(t) = \frac{U''}{U}(x) = \lambda \in \mathbf{R}$. Donc $U''(x) = \lambda U(x)$ et $V''(t) + 2aV'(t) = \lambda V(t)$.
2. L'équation $V''(t) + 2aV'(t) - \lambda V(t) = 0$ est une équation d'ordre 2, linéaire, à coefficients constants et sans second membre. Son polynôme caractéristique est $X^2 + 2aX - \lambda$ dont le discriminant est $\Delta = 4(a^2 + \lambda)$. Il faut distinguer des cas en fonction du signe de Δ :
   - Si $\Delta > 0$, les racines du polynôme sont $-a + \sqrt{a^2+\lambda}$ et $-a - \sqrt{a^2+\lambda}$ et V est de la forme $V(t) = Be^{(-a+\sqrt{a^2+\lambda})t} + Ce^{(-a-\sqrt{a^2+\lambda})t}$.
   - Si $\Delta = 0$, la racine double du polynôme est $-a$ et V est de la forme $V(t) = Be^{-at} + Cte^{-at}$.
   - Si $\Delta < 0$, les racines du polynôme sont $-a + i\sqrt{|a^2+\lambda|}$ et $-a - i\sqrt{|a^2+\lambda|}$ et V est de la forme $V(t) = e^{-at}(B\cos(\sqrt{|a^2+\lambda|}t) + C\sin(\sqrt{|a^2+\lambda|}t)$.
3. De plus λ est de la forme $\lambda = -(k\pi)^2$ où k est un entier strictement positif. Pour écrire les solutions stationnaires, il faut calculer les produits $U_k(x)V_k(t)$ en prenant la bonne forme de V en fonction de k. Si $a^2 - (k\pi)^2 > 0$, on est dans le premier cas ci-dessus et on obtient la solution stationnaire
$$y_k(x,t) = \sin(k\pi x)(Be^{(-a+\sqrt{a^2-(k\pi)^2})t} + Ce^{(-a-\sqrt{a^2-(k\pi)^2})t}).$$
   Si $a^2 - (k\pi)^2 = 0$, on obtient
$$y_k(x,t) = \sin(k\pi x)(Be^{-at} + Cte^{-at}).$$
   Si $a^2 - (k\pi)^2 < 0$, on obtient
$$y_k(x,t) = \sin(k\pi x)e^{-at}(B\cos(\sqrt{|a^2-(k\pi)^2|}t) + C\sin(\sqrt{|a^2-(k\pi)^2|}t).$$
   L'ensemble de toutes ces fonctions forme l'ensemble des solutions stationnaires de notre problème.
4. Dans chacun des trois cas, le terme en exponentielle permet de dire que pour tout x, $\lim_{t\to+\infty} y_k(x,t) = 0$ (pour le premier cas, il faut remarquer que $-a + \sqrt{a^2-(k\pi)^2} < 0$). Cela est raisonnable : les frottements entre la corde et l'air amortissent les vibrations et au bout d'un certain temps, ces dernières vont disparaître. On peut remarquer que dans le premier et le second cas, on obtient un comportement apériodique et dans le troisième, on obtient un comportement pseudo-périodique.

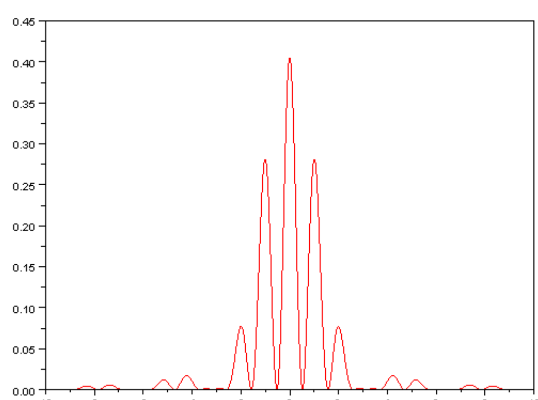
Exercice 4 : Transformée de Fourier et diffraction de la lumière

1. La transformée de Fourier de f est donnée par $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$. Donc $\hat{f}(x) = \int_{-a}^{a} e^{-itx}dt = [\frac{e^{-itx}}{-ix}]_{-a}^{a} = \frac{e^{iax}-e^{-iax}}{ix} = \frac{2\sin(ax)}{x}$. On reconnaît la fonction sinus cardinal : $\hat{f}(x) = 2a\mathrm{sinc}(ax)$.
2. On observe sur l'écran une grosse bande lumineuse central et quelques petites bandes de très faibles intensités de part et d'autre. L'intensité maximale est atteinte en $x = 0$ et vaut $\frac{a^2}{\pi^2}$. La bande centrale s'étale de $x = -\frac{\pi}{a}$ à $x = \frac{\pi}{a}$. Ainsi, plus a est petit, plus les bandes sont larges ($\frac{\pi}{a} \to \infty$), mais plus l'intensité est faible ($\frac{a^2}{\pi^2} \to 0$). Donc, plus la fente est étroite, plus la lumière sur l'écran est étalée et moins intense.
   Voici les courbes de I pour $a = 1.5$ et $a = 0.6$:





3. On calcule $\hat{f}(x) = \int_{-4a}^{4a} e^{-itx}dt - \int_{-2a}^{2a} e^{-itx}dt = \frac{2\sin(4ax)}{x} - \frac{2\sin(2ax)}{x}$ et on obtient $I(x) = \frac{1}{\pi^2}|\frac{\sin(4ax)-\sin(2ax)}{x}|^2$.
4. On trace les courbe de $\sin(4ax)$ et $\sin(2ax)$ pour en déduire le graphe de $\sin(4ax) - \sin(2ax)$. On obtient finalement la courbe de I suivante (pour $a = 1$) :



   On remarque ici qu'il y a plus de variations que dans le premier cas. Sur l'écran, on observera plusieurs bandes d'intensités élevées. C'est le phénomène d'interférence.