Contrôle 1

La calculatrice est autorisée. Les documents sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barème donné à titre indicatif : 4-3-8-8.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbf{R}_+^*$:

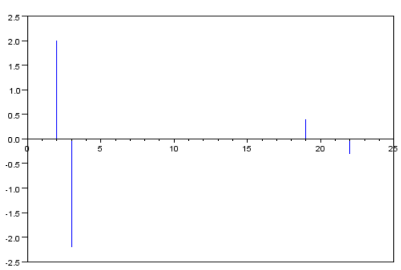
$$(E) \qquad xy'(x) + y(x) = \frac{1}{x^2}.$$

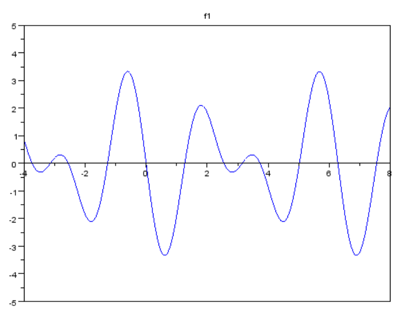
1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbf{R}_+^*$ de (E).
2. Représenter graphiquement l'allure de ces solutions.
3. Déterminer la solution de (E) dont la valeur maximale est 1 sur $\mathbf{R}_+^*$.

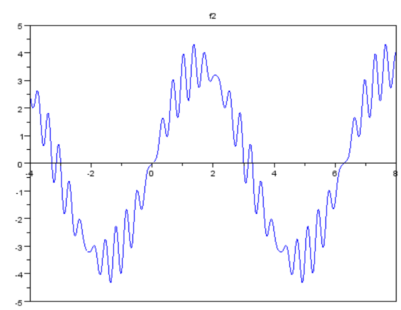
Exercice 2

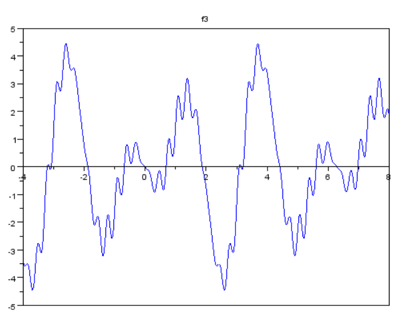
Le premier graphe est le spectre de Fourier des coefficients b_n d'une fonction 2π-périodique impaire. Trouver, parmi les cinq fonctions proposées, celle dont c'est le spectre.

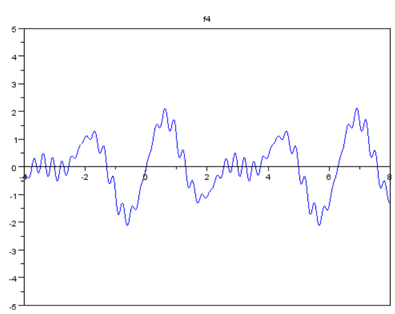
On expliquera brièvement, pour chacune des quatre autres fonctions, ce qui la différencie de la solution.

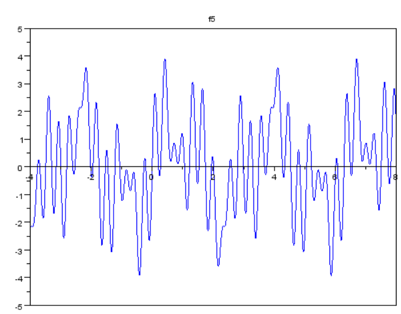












Exercice 3 : Morphogenèse

On souhaite comprendre les mécanismes de la formation spontanée des structures dans les organismes vivants. On cherche par exemple à comprendre la formation des bandes de couleur sur la peau d'un serpent.

Le modèle que nous proposons est extrêmement simpliste et éloigné de la réalité. Il permet néanmoins de comprendre comment d'une situation a priori homogène peut émerger un motif périodique.

On se place en dimension 1 sur la droite réelle. On considère deux substances chimiques (appelées morphogènes) présentes le long de cette droite. Leurs concentrations sont données par des fonctions $f(x,t)$ et $g(x,t)$ (dans notre modèle, elles peuvent prendre des valeurs négatives). Une grande concentration de la première substance dans une certaine zone entraînera le développement d'une certaine structure à cet endroit (une certaine pigmentation dans le cas du serpent). Les fonctions f et g sont liées par un système d'équations aux dérivées partielles (appelées équations de réaction-diffusion) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2f - 3g + 5\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = -2f + g + 3\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} \end{cases}$$

1. Quel est le sens physique des termes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ dans ces équations ?

2. Équilibre

   On cherche les solutions vérifiant $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} = 0$.

   (a) Déterminer les fonctions constantes solutions du système.

   (b) Trouver le réel strictement positif k tel qu'il y ait des solutions à l'équilibre de la forme $f(x,t) = a\sin(kx)$ et $g(x,t) = b\sin(kx)$ avec a et b non nuls.

3. Solutions du problème général

Les fonctions ci-dessous sont des solutions du problème général. Elles vont nous permettre de comprendre l'émergence d'un motif périodique à partir d'une situation homogène.

$$\begin{cases} f(x,t) = A_0 e^{-t} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{t\alpha(k)} \sin(kx) \\ g(x,t) = A'_0 e^{-t} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} A'_k e^{t\alpha(k)} \sin(kx) \end{cases}$$

avec $\alpha(k) = \frac{1}{2}(3 - 8k^2 + \sqrt{25 - 4k^2 + 4k})$.
Si le terme sous la racine est négatif, on obtient une valeur complexe. Il y a également pour tout k une relation que nous n'expliciterons pas entre les réels A_k et A'_k.

(a) Calculer $\alpha(1)$ et justifier que $\alpha(k)$ est de partie réelle strictement négative pour tout $k \geq 2$.

(b) Supposons qu'à l'instant initial $t = 0$, la fonction $x \mapsto f(x,0)$ est constante égale à C_0. En déduire que pour tout $k \geq 1$, $A_k = 0$. Décrire alors le comportement de f au cours du temps.

(c) Si la fonction f n'était initialement pas constante, quel serait a priori son comportement limite ?

(d) L'équilibre obtenu avec des fonctions constantes est-il donc stable ? Qu'observe-t-on en réalité au cours du temps si les concentrations initiales sont constantes le long de la droite ?

Exercice 4 : Flèche d'un pont

On considère le problème de la corde vibrante. Mais on souhaite désormais tenir compte de la force gravitationnelle et des frottements de l'air. La corde sera initialement en position horizontale. Elle va donc s'abaisser et osciller légèrement pour finalement converger vers sa position d'équilibre.

Concrètement, on peut imaginer une portion de pont entre deux piliers. Lorsqu'une fois construit, le pont va être libéré, il va plier sous son poids et osciller légèrement. Il est important que ce phénomène soit contrôlé sans quoi le pont rique de se briser.

L'objectif de cet exercice sera ainsi de déterminer la hauteur minimale atteinte par la corde au cours du mouvement.

Nous noterons $y(x,t)$ la hauteur de la corde au point x à l'instant t. Dans les conditons du problème, cette fonction est solution du problème suivant.

$$\text{Équation des ondes :} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial y}{\partial t} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g,$$

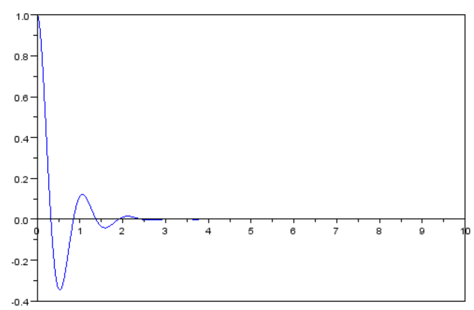
$$\text{Conditions aux bords :} \quad \forall t, \quad y(0,t) = 0 \ \text{ et } \ y(L,t) = 0.$$

Enfin, pour les applications numériques, nous poserons $L = 10m$ la longueur de la corde, $g = 10ms^{-2}$ la gravité, $\nu = 20ms^{-1}$ et $a = 2s^{-1}$ qui est lié au frottement entre l'air et la corde.

1. Déterminer la position y_{eq} de la corde à l'équilibre.
2. Quelle est la hauteur minimale de la corde à l'équilibre ?
3. Soit y une solution du problème. On pose $\tilde{y} = y - y_{eq}$.
   Montrer que $\tilde{y}$ est solution du problème de la corde vibrante avec frottements décrit plus bas.
4. En déduire que les solutions de notre problème sont les fonctions de la forme

$$y(x,t) = \frac{gx(x-L)}{2\nu^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(\frac{k\pi}{L}x)e^{-at}(A_k\cos(\lambda_k t) + B_k \sin(\lambda_k t)),$$

   avec $\lambda_k = \sqrt{\frac{\nu^2k^2\pi^2}{L^2} - a^2}$.
5. On considère désormais les conditions initiales suivantes : $\forall x \in [0,L], y(x,0) = 0$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$.
   Déterminer les valeurs des coefficients A_k et B_k correspondants.
   On pourra utiliser l'indication plus bas et on s'autorisera à dériver sous le signe somme.
6. Estimer numériquement la hauteur minimale atteinte par la corde au cours du temps. On fournit pour cela le graphe de la fonction $e^{-at}(\cos(\lambda_1 t) + \frac{a}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 t))$.



Le problème de la corde vibrante avec frottements est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \textit{Équation des ondes :} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2a\dfrac{\partial y}{\partial t} = \nu^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \\ \textit{Conditions aux bords :} & \forall t, \quad y(0,t) = 0 \quad \textit{et} \quad y(L,t) = 0. \end{array}$$

Les solutions de ce problème sont les fonctions $y(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(\frac{k\pi}{L}x)e^{-at}(A_k\cos(\lambda_k t) + B_k\sin(\lambda_k t))$, *avec* $\lambda_k = \sqrt{\frac{\nu^2k^2\pi^2}{L^2} - a^2}$.

On donne la valeur des intégrales suivante. Il s'agit des coefficients de Fourier de la fonction $x \mapsto x(x-L)$ *vue comme une fonction* $2L$*-périodique impaire.*

$$\frac{2}{L}\int_0^L x(x-L)\sin(\frac{k\pi x}{L})dx = 4L^2\frac{(-1)^k - 1}{\pi^3 k^3}.$$