Corrigé du contrôle 1

Exercice 1

On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbf{R}_+^*$:

$$(E) \qquad xy'(x) + y(x) = \frac{1}{x^2}.$$

1. On commence par résoudre l'équation homogène associée à (E) :$xy' + y = 0$. On pose $a = x$ et $b = 1$. Alors $\int -\frac{b}{a} = -\ln(x)$ et l'ensemble des solutions (définies sur $\mathbf{R}_+^*$) de l'équation homogène est

$$S_0 = \{\lambda e^{-\ln(x)}; \lambda \in \mathbf{R}\} = \{\frac{\lambda}{x}; \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

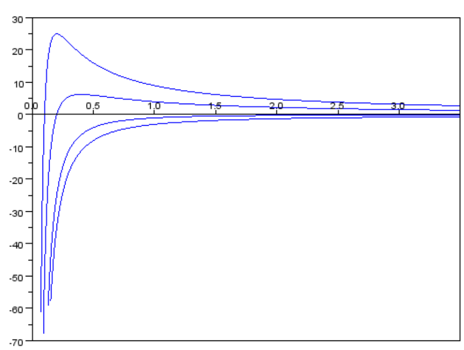
Cherchons maintenant une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante. On pose $y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$. Alors y_p est solution de (E) si et seulement si $x(\frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2}) + \frac{\lambda(x)}{x} = \frac{1}{x^2}$ si et seulement si

$$\lambda'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

On prend $\lambda(x) = -\frac{1}{x}$ et alors $y_p(x) = -\frac{1}{x^2}$.
L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$S = \{\frac{\lambda}{x} - \frac{1}{x^2}; \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

2. En 0, le terme $\frac{1}{x^2}$ est dominant donc toutes les solutions divergent vers $-\infty$ en 0^+. Et elles sonvergent toutes vers 0 en $+\infty$. D'autre part, si $\lambda \leq 0$ la solution reste négative sur $\mathbf{R}_+^*$ et si $\lambda > 0$, elle prend des valeurs positives et a alors un maximum.



3. Compte tenu des variations des solutions, on cherche une solution y et $x \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $y'(x) = 0$ et $y(x) = 1$ (cela signifie que y a son maximum en x et celui-ci vaut 1).
Posons $y(x) = \frac{\lambda}{x} - \frac{1}{x^2}$. Alors $y'(x) = -\frac{\lambda}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ et $y'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{2}{\lambda}$. De plus $y(\frac{2}{\lambda}) = \frac{\lambda}{\frac{2}{\lambda}} - \frac{1}{\frac{4}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2}{4}$. Ainsi y a son éventuel maximum en $x = \frac{2}{\lambda}$ et $y(x) = 1$ si et

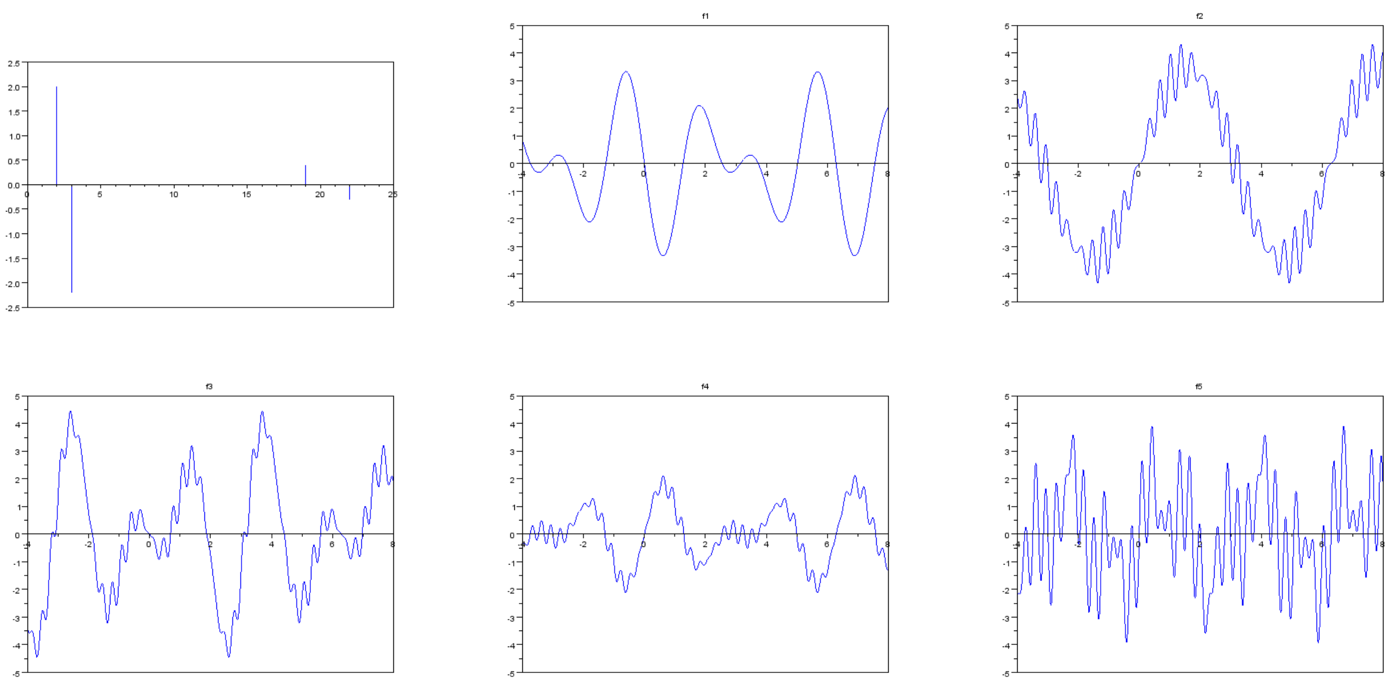
seulement si $\lambda = \pm 2$. Si $\lambda = -2$, $x < 0$ ce qui ne nous intéresse pas. Donc $\lambda = 2$ et la solution recherchée est

$$y(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Exercice 2

Le premier graphe est le spectre de Fourier des coefficients b_n d'une fonction 2π-périodique impaire. Trouver, parmi les cinq fonctions proposées, celle dont c'est le spectre.

On expliquera brièvement, pour chacune des quatre autres fonctions, ce qui la différencie de la solution.



D'après le spectre, la fonction recherchée est la fonction

$$f(x) = 2\sin(2x) - 2,2\sin(3x) + 0,4\sin(19x) - 0,3\sin(22x).$$

Cette fonction possède deux termes forts en basse fréquence et deux très faibles en haute fréquence. La fonction correspondante est la fonction f_3.

La fonction f_1 n'est pas bruitée, elle ne possède pas de hautes fréquences.

La fonction f_2 est composée d'un signal de période 2π et de bruit. Elle n'a donc qu'un seul terme (en $\sin(x)$) en basse fréquence.

La fonction f_4 est d'amplitude trop faible. En effet, les termes $2\sin(2x)$ et $-2,2\sin(3x)$ ont des amplitudes de l'ordre de 2. Là où ces deux fonctions s'ajouteront "le mieux" on obtiendra pour f une amplitude de l'ordre de 4. Et f_4 a une amplitude de l'ordre de 2.

La fonction f_5 a des termes de grande amplitude en haute fréquence, elle oscille beaucoup.

Exercice 3 : Morphogenèse

On souhaite comprendre les mécanismes de la formation spontanée des structures dans les organismes vivants. On cherche par exemple à comprendre la formation des bandes de couleur sur la peau d'un serpent.

Le modèle que nous proposons est extrêmement simpliste et éloigné de la réalité. Il permet néanmoins de comprendre comment d'une situation a priori homogène peut émerger un motif périodique.

On se place en dimension 1 sur la droite réelle. On considère deux substances chimiques (appelées morphogènes) présentes le long de cette droite. Leurs concentrations sont données par des fonctions $f(x,t)$ et $g(x,t)$ (dans notre modèle, elles peuvent prendre des valeurs négatives). Une grande concentration de la première substance dans une certaine zone entraînera le développement d'une certaine structure à cet endroit (une certaine pigmentation dans le cas du serpent). Les fonctions f et g sont liées par un système d'équations aux dérivées partielles (appelées équations de réaction-diffusion) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2f - 3g + 5\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = -2f + g + 3\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} \end{cases}$$

1. Les termes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ sont les laplaciens de f et g. Comem dans l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes, ils représentent dans l'équation différentielle une propagation dans l'espace. Ici, ces termes représentent la diffusion des morphogènes le long de la droite.

2. Équilibre

   On cherche les solutions vérifiant $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} = 0$.

   (a) On pose $f(x,t) = a$ et $g(x,t) = b$ des fonctions constantes. Alors toutes les dérivées de f et g sont nulles. Ainsi ces fonctions sotn solutions si et seulement si
   $$2a - 3b = 0 \quad \text{et} \quad -2a + b = 0.$$
   La seule solution est $a = b = 0$. Ainsi, les seules fonctions constantes solutions sont les fonctions nulles.

   (b) Posons $f(x,t) = a\sin(kx)$ et $g(x,t) = b\sin(kx)$. Alors $f'' = -k^2 a\sin(kx)$ et $g'' = -k^2 b\sin(kx)$. Donc f et g sont solutions si et seulement si
   $$(2a - 3b - 5k^2 a)\sin(kx) = 0 \quad \text{et} \quad (-2a + b - 3k^2 b)\sin(kx) = 0.$$

Ce système est équivalent à

$$(2-5k^2)a-3b=0 \;\text{ et }\; -2a+(1-3k^2)b=0.$$

Le couple $(a,b)=(0,0)$ est solution. C'est l'unique solution de ce système linéaire si le déterminant du système est non nul. Il existe donc une autre solution si le déterminant $(2-5k^2)(1-3k^2)-6=0$. On trouve $k^2=1$ ou $k^2=-\frac{4}{15}$. Ce deuxième cas est clairement exclus. On prend alors $k=1$ et on peut alors choisir $a=1$ et $b=-1$ pour avoir des solutions non triviales

$$f(x,t)=\sin(x) \;\text{ et }\; g(x,t)=-\sin(x).$$

3. Solutions du problème général

Les fonctions ci-dessous sont des solutions du problème général. Elles vont nous permettre de comprendre l'émergence d'un motif périodique à partir d'une situation homogène.

$$\begin{cases} f(x,t)=A_0e^{-t}+\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}A_ke^{t\alpha(k)}\sin(kx) \\ g(x,t)=A'_0e^{-t}+\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}A'_ke^{t\alpha(k)}\sin(kx) \end{cases}$$

avec $\alpha(k)=\dfrac{1}{2}(3-8k^2+\sqrt{25-4k^2+4k})$.

Si le terme sous la racine est négatif, on obtient une valeur complexe. Il y a également pour tout k une relation que nous n'expliciterons pas entre les réels A_k et A'_k.

(a) On trouve $\alpha(1)=0$, $\alpha(2)=\frac{1}{2}(-21+\sqrt{17})<0$ et $\alpha(3)=-34$. À partir de $k=4$ on a $25-4k^2+4k<0$. Alors $\alpha(k)$ est un nombre complexe de partie réelle $\frac{1}{2}(3-8k^2)<0$. Ainsi, pour tout $k\geq 2$, $\alpha(k)$ est de partie réelle strictement négative.

(b) Supposons qu'à l'instant initial $t=0$, la fonction $x\mapsto f(x,0)$ est constante égale à C_0. Donc

$$f(x,0)=C_0=A_0+\sum_{k=1}^{+\infty}A_k\sin(kx).$$

On reconnaît une série de Fourier. On peut donc identifier ses coefficients avec ceux de la fonction constante C_0 : $\forall k\geq 1, A_k=0$ et $A_0=C_0$.

Ainsi $f(x,t)=C_0e^{-t}$. Cette fonction décroît (ou croît) exponentiellement vite vers 0. Autrement dit, si la concentration du premier morphogène est initialement constante, elle convergera vers le premier équilibre que l'on a obtenu dans la partie précédente.

(c) Si la fonction f est initialement non constante, cela signifie que les coefficients A_k ne sont pas nuls. On peut en particulier supposer $A_1\neq 0$. Alors comme $\alpha(k)$ est de partie réelle négative pour $k\geq 2$, chaque terme correspondant de la somme va converger vers 0. Par contre, comme $\alpha(1)=0$, le premier terme va rester constant. Ainsi la fonction va converger quand t tend vers $+\infty$ vers la fonction $A_1\sin(x)$. C'est le second équilibre obtenu précédement.

(d) Si les concentratons des morphogènes sont initialement constantes, elles devraient converger vers 0. Cependant, elles ne peuvent pas concrètement être parfaitement constantes, il y a forcément des perturbations. Et si elles ne sont pas constantes, elles convergent vers l'autre position d'équilibre données par des fonctions en $\sin(x)$. Ainsi, le premier équilibre est instable et le système va converger vers une situation périodique. Cette répartition en $\sin(x)$ permet d'expliquer la présence des bandes colorées sur la peau du serpent. Au cours des formations cellulaires, régies par les équations de réaction-diffusion, les concentrations de morphogènes vont peu à peu s'écarter d'une répartition constante vers une répartition périodique.

Exercice 4 : Flèche d'un pont

On considère le problème de la corde vibrante. Mais on souhaite désormais tenir compte de la force gravitationnelle et des frottements de l'air. La corde sera initialement en position horizontale. Elle va donc s'abaisser et osciller légèrement pour finalement converger vers sa position d'équilibre.

Concrètement, on peut imaginer une portion de pont entre deux piliers. Lorsqu'une fois construit, le pont va être libéré, il va plier sous son poids et osciller légèrement. Il est important que ce phénomène soit contrôlé sans quoi le pont rique de se briser.

L'objectif de cet exercice sera ainsi de déterminer la hauteur minimale atteinte par la corde au cours du mouvement.

Nous noterons $y(x,t)$ la hauteur de la corde au point x à l'instant t. Dans les conditons du problème, cette fonction est solution du problème suivant.

$$\text{Équation des ondes :} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial y}{\partial t} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g,$$

$$\text{Conditions aux bords :} \quad \forall t, \quad y(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad y(L,t) = 0.$$

Enfin, pour les applications numériques, nous poserons $L = 10m$ la longueur de la corde, $g = 10ms^{-2}$ la gravité, $\nu = 20ms^{-1}$ et $a = 2s^{-1}$ qui est lié au frottement entre l'air et la corde.

1. À l'équilibre, la corde ne vibre plus et $\frac{\partial y_{eq}}{\partial t} = 0$. L'équation des ondes devient alors ici

$$\nu^2 \frac{\partial^2 y_{eq}}{\partial x^2} - g = 0.$$

   On intègre deux fois et on obtient $\nu^2 y_{eq}(x) = \frac{gx^2}{2} + Ax + B$, où A et B sont des constantes réelles. Or y_{eq} doit vérifier les conditions aux bords $y_{eq}(0) = 0$ et $y_{eq}(L) = 0$. On en déduit que $B = 0$ et $A = -\frac{gL}{2}$. Ainsi

$$y_{eq}(x) = \frac{gx^2}{2\nu^2} - \frac{gLx}{2\nu^2} = \frac{gx(x-L)}{2\nu^2}.$$

2. À l'équilibre, la corde a une forme de parabole dont le minimum est atteint au milieu de la corde. On peut le vérifier en étudiant la fonction y_{eq} : $y'_{eq}(\frac{L}{2}) = 0$.

   Donc la hauteur minimale est $y_{eq}(\frac{L}{2}) = -\frac{gL^2}{8\nu^2} \approx -0,31m$.

3. Soit y une solution du problème. On pose $\tilde{y} = y - y_{eq}$. Comme y et y_{eq} sont solutions du problème étudié

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial y}{\partial t} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g$$

$$\frac{\partial^2 y_{eq}}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial y_{eq}}{\partial t} = \nu^2\frac{\partial^2 y_{eq}}{\partial x^2} - g$$

Faisons la différence :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_{eq}}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial y}{\partial t} - 2a\frac{\partial y_{eq}}{\partial t} = \nu^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \nu^2\frac{\partial^2 y_{eq}}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = \nu^2\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x^2}$$

De plus, y et y_{eq} vérifient les conditions aux bords ; ces fonctions sont nulles en $x = 0$ et $x = L$. Il en est donc de même pour $\tilde{y}$.

Ainsi $\tilde{y}$ est solution du problème de la corde vibrante avec frottements.

4. Or on connaît les solutions de ce problème. Donc $\tilde{y}$ est de la forme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(\frac{k\pi}{L}x)e^{-at}(A_k\cos(\lambda_k t) + B_k\sin(\lambda_k t)),$$

avec $\lambda_k = \sqrt{\frac{\nu^2k^2\pi^2}{L^2} - a^2}$.
On en déduit que $y = y_{eq} + \tilde{y}$ est de la forme

$$y(x,t) = \frac{gx(x-L)}{2\nu^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(\frac{k\pi}{L}x)e^{-at}(A_k\cos(\lambda_k t) + B_k\sin(\lambda_k t)).$$

5. On considère désormais les conditions initiales suivantes : $\forall x \in [0,L], y(x,0) = 0$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$.
En reprenant l'expression de la question précédente, on obtient

$$y(x,0) = 0 = \frac{gx(x-L)}{2\nu^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\sin(\frac{k\pi}{L}x).$$

Donc

$$-\frac{gx(x-L)}{2\nu^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\sin(\frac{k\pi}{L}x).$$

On reconnaît une série de Fourier d'une fonction impaire $2L$-périodique. Les coefficients A_k sont donc les coefficients de la fonction $-y_{eq}$ vue comme une fonction périodique :

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L -\frac{gx(x-L)}{2\nu^2}\sin(\frac{k\pi x}{L})dx = -\frac{g}{\nu^2} \times 4L^2\frac{(-1)^k - 1}{\pi^3 k^3}.$$

De même

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(\frac{k\pi}{L}x)(-aA_k + \lambda_k B_k).$$

On reconnaît donc la série de Fourier de la fonction nulle. Donc tous ses coefficients sont nuls :

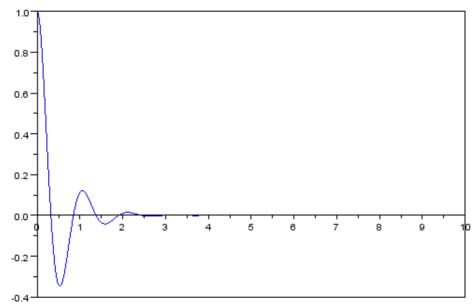
$$\forall k, \quad -aA_k + \lambda_k B_k = 0 \ \text{ donc } \ B_k = \frac{a}{\lambda_k}A_k.$$

Nous avons donc déterminé les coefficients A_k et B_k de la fonction y.

6. On a déjà déterminé le minimum de y_{eq}. Évaluons le minimum de la série. Remarquons que les coefficients A_k et B_k sont nuls quand k est pair et sont en $1/k^3$. La convergence de la série est donc rapide. Nous allons considérer que le reste de la série est négligeable devant son premier terme (il faudrait le vérifier avec plusieurs évaluation numériques).
Le premier terme est égal à $A_1 \sin(\frac{\pi}{L}x)e^{-at}(\cos(\lambda_1 t)+\frac{a}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 t))$. Le minimum est atteint en $x=\frac{L}{2}$ et d'après la courbe proposée, en $t \approx 0,5$. Il vaut approximativement $A_1 * (-0.33)$ avec $A_1 = \frac{8gL^2}{\nu^2\pi^3} \approx 0,65$.
Le minimum atteint par la corde au cours du temps sera donc

$$m \approx -0,31 - 1,065 \times 0,33 \approx 0,52m.$$

Graphe de la fonction $e^{-at}(\cos(\lambda_1 t)+\frac{a}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 t))$.



Le problème de la corde vibrante avec frottements est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \textit{Équation des ondes :} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2a\dfrac{\partial y}{\partial t} = \nu^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \\ \textit{Conditions aux bords :} & \forall t, \quad y(0,t)=0 \quad \textit{et} \quad y(L,t)=0. \end{array}$$

Les solutions de ce problème sont les fonctions $y(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(\frac{k\pi}{L}x)e^{-at}(A_k\cos(\lambda_k t)+B_k\sin(\lambda_k t))$, *avec* $\lambda_k = \sqrt{\frac{\nu^2k^2\pi^2}{L^2} - a^2}$.

On donne la valeur des intégrales suivante. Il s'agit des coefficients de Fourier de la fonction $x \to x(x-L)$ *vue comme une fonction* $2L$*-périodique impaire.*

$$\frac{2}{L}\int_0^L x(x-L)\sin(\frac{k\pi x}{L})dx = 4L^2\frac{(-1)^k-1}{\pi^3k^3}.$$