Contrôle 1

Les documents et calculatrices sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barême donné à titre indicatif : 3-4-13.

Exercice 1 : Un détail du cours.

Soit $\lambda \geq 0$ et $L > 0$. Montrer que la seule solution au problème ci-dessous est la fonction nulle.

$$y'' - \lambda y = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = y(L) = 0.$$

Exercice 2 : Un modèle simple de conduction thermique.

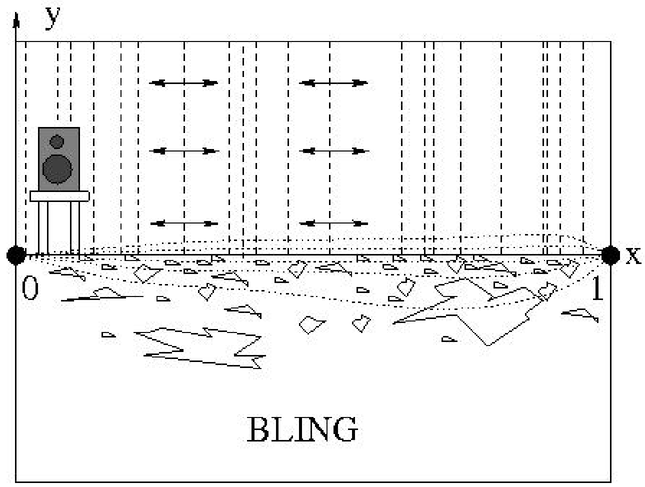
On considère un solide de petite taille, assimilable à un point. Il est initialement à température T_0 et se trouve dans un mileu à température constante T_m.

La loi de refroidissement de Newton affirme que la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant.

1. Traduire la loi de Newton à l'aide d'une équation différentielle d'ordre 1.
2. Résoudre cette équation différentielle.
3. Représenter l'allure de la température du corps au cours du temps.

Exercice 3 : Problème de voisinage.

Cet exercice et l'illustration ci-dessous sont tirés d'un devoir donné par Loïc Teyssier.



Mon voisin du dessus écoute de la musique trop fort. L'onde sonore qui en découle modifie la pression de l'air dans son salon, pression qui s'exerce sur mon plafond et le fait vibrer. C'est la vibration du plafond qui permet de transmettre à la pièce du dessous (mon salon) une partie du son initial. Nous allons étudier cette vibration.

On assimile le plafond à une corde vibrante unidimensionnelle de longueur 1 et d'épaisseur d.

La pression de l'air qui s'exerce sur le plafond et qui est due à la musique du voisin est donnée par une fonction de la forme

$$P(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi\mu t),$$

où μ est un nombre réel positif et les A_n sont des paramètres réels.

On note $y(x,t)$ la hauteur du plafond au point x et à l'instant t. À l'instant initial, juste avant que la musique ne démarre, le plafond est dans sa position d'équilibre :

$$\forall x \in [0,1], y(x,0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0,1], \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0.$$

Il ne s'écroulera pas et ses extrêmités resteront à la hauteur 0.

Enfin, en négligeant un certain nombre de paramètres, l'évolution de y est décrite par l'équation des cordes vibrantes, donnée ici par

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{d}P, \tag{1}$$

où ν est un paramètre réel positif supposé différent de μ.

Dans tout le problème, on s'autorisera à dériver sous le signe somme sans le justifier.

1. **Résolution du problème**

   (a) Déterminer une solution particulière de l'équation 1 sous la forme

   $$y_p(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi\mu t).$$

   (b) Soit y la solution de notre problème. Montrer que $y - y_p$ est solution du problème classique de la corde vibrante rappelé au verso de cette feuille.

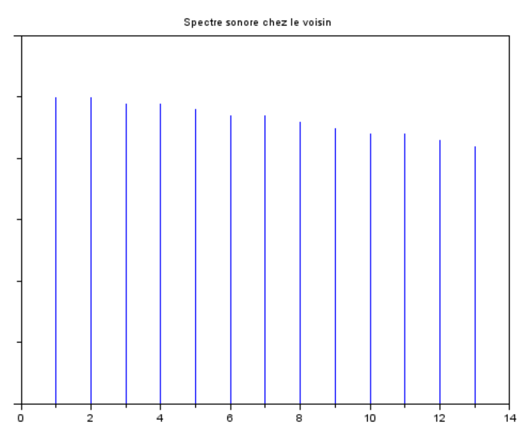
   (c) En déduire, en utilisant les conditions initiales, que la solution est donnée par

   $$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(n\pi x)(\cos(n\pi\mu t) - \cos(n\pi\nu t)),$$

   avec $\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad C_n = \dfrac{A_n}{d\pi^2 n^2(\nu^2 - \mu^2)}.$

2. **Interprétation des résultats**

   (a) Le spectre de l'onde sonore du voisin est décrit par la liste des coefficients A_n. Celui de l'onde sonore perçue chez moi est donné par les coefficients C_n. Supposons que le spectre des A_n a l'allure suivante.



   Représenter grossièrement l'allure du spectre des C_n correspondant.

   (b) Quelles fréquences sonores sont les mieux transmises par le plafond ? Vaut-il mieux pour mon repos que mon voisin écoute, à volume égal, du Céline Dion ou du Barry White ?

   (c) Qu'obtient-on si μ est très proche de ν ? Comment se comporte alors le plafond ? Quel est ce phénomène ? Notre modèle est-il correct dans ce cas ?

   (d) Quels sont, d'après notre modèle, les paramètres qui jouent un rôle dans la qualité de l'isolation phonique ?

Rappel

Une fonction y est solution du problème de la corde vibrante pour $L = 1$ si elle satisfait les deux conditions suivantes.

Équation des ondes : $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Conditions au bord : $\forall t > 0 \;\; y(0,t) = 0 \;\text{ et }\; y(1,t) = 0$

Les solutions de ce problème sont les fonctions de la forme

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi x) \left(\alpha_n \cos(n\pi\nu t) + \beta_n \sin(n\pi\nu t)\right),$$

où les α_n et β_n sont des nombres réels.