Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 : Un détail du cours.

Soit $\lambda \geq 0$ et $L > 0$. Montrer que la seule solution au problème ci-dessous est la fonction nulle.

$$y'' - \lambda y = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = y(L) = 0.$$

Remarquons déjà que la fonction nulle est clairement une solution du problème.

Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle est $X^2 - \lambda$. Il y a alors deux cas.

Si $\lambda > 0$, le polynôme possède deux racines : $\sqrt{\lambda}$ et $-\sqrt{\lambda}$. Les solutions de l'équation différentielles sont les fonctions $y(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ avec A et B dans $\mathbf{R}$. Cherchons alors les solutions qui vérifient $y(0) = y(L) = 0$. On a $y(0) = A + B$. Il faut donc que $A = -B$. Alors $y(L) = Ae^{\sqrt{\lambda}L} - Ae^{-\sqrt{\lambda}L} = 0$. Or, comme $L \neq 0$, $e^{\sqrt{\lambda}L} \neq e^{-\sqrt{\lambda}L}$. Donc nécessairement $A = 0$ et y est la fonction nulle.

Si $\lambda = 0$, le polynôme a pour racine double 0. Les solutions de l'équation différentielles sont les fonctions $y(x) = Ae^{0x} + Bxe^{0x} = A + Bx$ avec A et B dans $\mathbf{R}$. Cherchons alors les solutions qui vérifient $y(0) = y(L) = 0$. On a $y(0) = A$, donc $A = 0$. Ainsi $y(L) = BL$, donc comme $L \neq 0$, $B = 0$ et y est la fonction nulle.

Ainsi, la fonction nulle est la seule solution au problème.

Exercice 2 : Un modèle simple de conduction thermique.

1. Notons $T(t)$ la température du solide à l'instant t. La vitesse de refroidissement à l'instant t est donnée par $-T'(t)$. La loi de refroidissement se traduit alors par l'équation
$$-T'(t) = \lambda(T(t) - T_m),$$
où λ est une constante réelle positive liée aux propriétés thermiques du solide et du milieu.
2. Ainsi, T est solution de l'équation
$$y' + \lambda y = \lambda T_m.$$
L'équation homogène associée est $y' + \lambda y = 0$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \mu e^{-\lambda t}$ avec $\mu \in \mathbf{R}$.
La fonction constante $y(t) = T_m$ est une solution particulière de l'équation.
On en déduit que T peut s'écrire sous la forme
$$T(t) = T_m + \mu e^{-\lambda t}.$$
D'autre part, on sait qu'à l'instant initial, $T(0) = T_0$. On en déduit que $\mu = T_0 - T_m$. On peut donc conclure que T est donnée par
$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-\lambda t}.$$
3. Si $T_0 > T_m$, la température va décroître de façon exponentielle pour tendre à la limite vers la température T_m.

Exercice 3 : Problème de voisinage.

1. **Résolution du problème**

   (a) Déterminons les coefficients B_n tels que la fonction

   $$y_p(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi\mu t)$$

   soit solution de l'équation 1.
   On calcule

   $$\frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2\pi^2\mu^2 B_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi\mu t),$$
   $$\frac{\partial^2 y_p}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2\pi^2 B_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi\mu t).$$

   Donc $\frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2} = \nu^2\frac{\partial^2 y_p}{\partial x^2} + \frac{1}{d}P$ ssi

   $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} -n^2\pi^2\mu^2 B_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi\mu t) &= \nu^2\sum_{n=1}^{+\infty} -n^2\pi^2 B_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi\mu t)\\ &\quad +\frac{1}{d}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi\mu t).\end{aligned}$$

   Si on prend $t=0$ on reconnaît une égalité entre séries de Fourier et nous pouvons donc identifier les coefficients de ces séries : pour tout n,

   $$-n^2\pi^2\mu^2 B_n = -n^2\pi^2\nu^2 B_n + \frac{A_n}{d}.$$

   On en déduit que pour tout n,

   $$B_n = \frac{A_n}{n^2\pi^2 d(\nu^2-\mu^2)}$$

   et

   $$y_p(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{n^2\pi^2 d(\nu^2-\mu^2)}\sin(n\pi x)\cos(n\pi\mu t)$$

   est une solution particulière de l'équation 1.

   (b) Soit y la solution de notre problème. Alors y et y_p sont des solutions de l'équation 1. Posons $\tilde{y} = y - y_p$. On a ainsi $\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y_p}{\partial x^2}$. Comme $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \nu^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P/d$ et $\frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2} = \nu^2\frac{\partial^2 y_p}{\partial x^2} + P/d$, on obtient

   $$\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial t^2} = \nu^2\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial x^2}.$$

   D'autre part, on a clairement pour tout t, $y_p(0,t) = y_p(1,t) = 0$ et on a également par hypothèse pour tout t, $y(0,t) = y(1,t) = 0$. On en déduit que $\tilde{y}$ vérifie cette même condition au bord.
   Ainsi $\tilde{y} = y - y_p$ vérifie les conditions du problème de l'équation des cordes vibrante étudiée en cours.

(c) On en déduit que $y - y_p$ s'écrit sous la forme

$$(y - y_p)(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi x)\left(\alpha_n \cos(n\pi\nu t) + \beta_n \sin(n\pi\nu t)\right),$$

où les α_n et β_n sont des nombres réels. Donc

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi x)\left(\alpha_n \cos(n\pi\nu t) + \beta_n \sin(n\pi\nu t)\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{n^2\pi^2 d(\nu^2-\mu^2)} \sin(n\pi x)\cos(n\pi\mu t).$$

Or on sait qu'à $t = 0$, $y(x,0)$ est partout nulle. On en déduit $\sum_n \alpha_n \sin(n\pi x) + \sum_n \frac{A_n}{n^2\pi^2 d(\nu^2-\mu^2)} \sin(n\pi x) = 0$ pour tout x. Donc pour tout entier n,

$$\alpha_n = -\frac{A_n}{n^2\pi^2 d(\nu^2-\mu^2)}.$$

De plus, à $t = 0$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$. Donc $\sum_n n\pi\nu\beta_n \sin(n\pi x) = 0$ pour tout x. On en déduit, comme $\nu \neq 0$, que les β_n sont tous nuls.

Finalement, la solution du problème est donnée par la série

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(n\pi x)(\cos(n\pi\mu t) - \cos(n\pi\nu t)),$$

avec $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad C_n = \dfrac{A_n}{d\pi^2 n^2(\nu^2-\mu^2)}.$

2. **Interprétation des résultats**

(a) Il faut remarquer que l'expression des C_n est de la forme $c\frac{A_n}{n^2}$. Ainsi, si on considère que les premiers termes A_n sont presque constants, les premiers termes C_n décroisseront eux assez vite. On aura $C_2 \approx \frac{C_1}{4}$, $C_3 \approx \frac{C_1}{9}$, etc.

(b) À cause de la constante $\frac{1}{d\pi^2(\nu^2-\mu^2)}$, tous les coefficients A_n sont certainement amortis par le plafond. Mais à cause de ce terme en $\frac{1}{n^2}$, on constate que les A_n pour n grand sont bien plus amortis que ceux pour n petit. Le son perçu chez moi est directement lié à la vibration du plafond et celle-ci ne retransmet quasiment que les faibles fréquences présentes dans le spectre de la musique du voisin. Ce sont donc les basses fréquences qui sont les mieux transmises à travers le plafond. Les hautes fréquences sont "absorbées" par le plafond. Le plafond agit comme un filtre passe-bas.

Si je souhaite dormir, il vaut mieux que mon voisin écoute du Céline Dion que du Barry White...

(c) Si μ est très proche de ν, les C_n vont être très grands (au moins pour n petit). Dans ce cas, non seulement la musique est transmise par le plafond, mais il semble même qu'elle soit amplifiée. Il y a un phénomène de résonnance. La musique et le plafond ont des modes propres de vibrations très proche et la vibration du premier fait alors vibrer l'autre fortement.

Le spectre de la vibration du plafond étant très intense, on devrait vraiment observer de fortes oscillations du plafond, et il se peut que cela le fasse s'éfondrer. Hors, notre modèle n'est valable que pour des faibles oscillations. Si on souhaite donc modéliser correctement le phénomène, il faut considérer une équation des cordes vibrantes plus complexe.

Remarque : il n'est pas très crédible qu'une onde musicale ait une fréquence propre proche de la fréquence propre du plafond. On peut par contre imaginer d'autres phénomènes pour lesquels le phenomène de résonnance avec le plafond peut arriver (un métro qui passe sous l'immeuble, par exemple).

Pour être parfaitement rigoureux, il faudrait tenir compte du terme $\cos(n\pi\mu t) - \cos(n\pi\nu t)$. En effet, si μ est proche de ν, ce terme semble proche de 0 et pourrait se compenser avec le terme $\nu^2 - \mu^2$ du dénominateur. C'est en effet le cas tant que t est petit. Mais quand t est assez grand, les termes $n\pi\nu t$ et $n\pi\mu t$ s'écartent et il n'y a plus de compensation. On observe donc dans un premier temps de faibles oscillations du plafond, elles s'amplifient de plus en plus pour finalement aboutir au phénomène de résonnance.

(d) Si on s'en tient à notre modèle, il y a deux paramètres qui interviennent dans la transmission du son : l'épaisseur d et la fréquence propre ν du plafond. Plus d est grand, plus les coefficients C_n seront faibles, et donc plus le son sera atténué. De même, plus ν est éloignée de la fréquence musicale μ, plus les coefficients C_n sont faibles et le son aténué.

Ainsi, pour une bonne isolation phonique, il faut avoir une plafond bien épais (cela semble raisonnable) dont la fréquence propre est très eloignée des fréquences sonores.