CONTRÔLE 1

Exercice 1

Soit $a \in \mathbf{R}^*$ et f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + a^2} \sin(nx).$$

On admet que cette série est bien convergente pour tout x. Le but de l'exercice est de trouver une expression plus simple pour f.

1. Justifier que f est une fonction 2π-périodique impaire et donner ses coefficients de Fourier.
2. Soit g la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $g(x) = \dfrac{x}{2}$.
   Calculer la série de Fourier de g.
3. Soit $h = f + \dfrac{x}{2}$. Déterminer la série de Fourier de h.
4. En admettant que h est de classe C^2 sur $]-\pi, \pi[$, calculer la série de Fourier de h''.
5. En déduire que sur $]-\pi, \pi[$, f est solution de l'équation différentielle $f'' = a^2 f$. Que peut-on en déduire sur f ?
6. Déterminer complètement l'expression de f en utilisant les valeurs de $f(0)$ et b_1.
   Remarque : pour simplifier les calculs, on peut utiliser le fait que b_1 est la partie imaginaire de $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ix}dx$.

Rappels : Les coefficients de Fourier d'une fonction f 2π-périodique sont pour $n \geq 1$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

La série de Fourier de f est $S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$.
Le théorème de Dirichlet affirme que si f est une fonction continue par morceaux, alors $\forall x \in \mathbf{R}$, $S_f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. En particulier, si f est continue en x, on a $S_f(x) = f(x)$.

Exercice 2

On considère une barre de longueur 2 en contact à l'une de ses extrêmités avec un milieu à température constante de 1°. À l'instant $t = 0$, l'autre extrêmité est mise en contact avec un milieu à 0°. On souhaite décrire l'évolution de la température dans la barre.

Les données du problèmes sont les suivantes :

$$\text{Équation de la chaleur :} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$\text{Conditions au bord :} \quad \forall t > 0 \;\; T(0,t) = 0 \;\; \text{et} \;\; T(2,t) = 1 \tag{2}$$

$$\text{Condition initiale :} \quad \forall x \in]0,2[\;\; T(x,0) = 1 \tag{3}$$

1. Montrer que la fonction $T_L(x,t) = \dfrac{x}{2}$ est la <u>seule</u> solution aux équations 1 et 2 qui soit indépendante de t.
2. Soit T la solution du problème. On pose $\tilde{T} = T - T_L$.
   Montrer que $\tilde{T}$ vérifie l'équation de la chaleur. Donner les conditions au bord et la condition initiale pour $\tilde{T}$.
3. En déduire l'expression de $\tilde{T}$ puis celle de T.
4. Comment se répartit la température dans la barre après un temps suffisamment grand ?

Rappels : Pour une barre de longueur L en contact à ses deux extrêmités avec des milieux à 0° et dont la température initiale est donnée par une fonction T_0, sa température T est solution du système d'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad \forall t > 0 \;\; T(0,t) = 0 \;\; et \;\; T(L,t) = 0, \qquad \forall x \in]0,L[\;\; T(x,0) = T_0(x),$$

et l'unique solution est donnée par

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\frac{k\pi}{L}x) e^{-t(\frac{k\pi}{L})^2},$$

avec pour tout k,

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L T_0(x) \sin(\frac{k\pi}{L}x) dx.$$