CONTRÔLE 1

Exercice 1

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+a^2} \sin(nx).$$

1. La fonction f est une somme de fonctions 2π-périodique impaires. Elle est donc clairement 2π-périodique et impaire.
   De plus on reconnaît dans son expression une série de Fourier. Ses coefficients de Fourier sont donc
   $$\forall n \geq 0, \quad a_n = 0, \qquad \forall n > 0, \quad b_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+a^2}.$$
2. La fonction g étant continue par morceaux, elle admet une décomposition en série de Fourier. Elle est impaire, donc seuls ses coefficients de Fourier b_n sont non nuls, et
   $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin(nx)dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$
   La série de Fourier de g est donc
   $$S_g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$
3. Comme nous connaissons les séries de Fourier de f et g, on en déduit immédiatement celle de h :
   $$S_h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+a^2} \sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{-a^2}{n(n^2+a^2)} \sin(nx).$$
4. La fonction h étant de classe C^2, on peut montrer que h'' est impaire comme h et que si cela a un sens, leurs coefficients de Fourier sont liés par la relation $b_n(h'') = -n^2 b_n(h)$ (on démontre cela avec une double intégration par parties, mais il est également possible de dériver simplement la série de Fourier de h). On obtient ainsi
   $$S_{h''}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{na^2}{n^2+a^2} \sin(nx).$$
   Cette série est bien convergente pour tout x et définit donc bien une série de Fourier. Si on avait appliqué le même raisonnement à la série de f, on aurait obtenu une série divergente qui n'aurait pas été la série de Fourier de f''.

   De plus h'' étant continue sur $]-\pi, \pi[$, elle est égale d'après Dirichlet à sa série de Fourier sur cet intervalle. On peut alors conclure que $h'' = S_{h''} = a^2 f$ sur $]-\pi, \pi[$.
5. D'autre part, les fonctions h et g étant de classe C^2 sur $]-\pi, \pi[$ il en est de même pour f et $f'' = h'' - g''$ sur cet intervalle. Or g'' est nulle. Donc sur $]-\pi, \pi[$, on obtient $f'' = h'' = a^2 f$.
   C'est une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants. Comme $a^2 > 0$ on obtient que f est de la forme
   $$f(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax}.$$

6. De plus, $f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+a^2} \sin(0) = 0$. Donc $A + B = 0$ et donc $B = -A$.
Enfin, le coefficient b_1 de f est égal à $-\frac{1}{1+a^2}$. Calculons-le avec la nouvelle expression de f en remarquant qu'il est égal à la partie imaginaire de $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ix}dx$.
$$\int_{-\pi}^{\pi} (Ae^{ax} - Ae^{-ax})e^{ix}dx = A[\frac{e^{a+i}x}{a+i} - \frac{e^{-a+i}x}{-a+i}]_{-\pi}^{\pi} = \frac{A}{-1-a^2}((a-i)e^{a\pi} + (a+i)e^{-ax}).$$
On doit donc avoir
$$-\frac{1}{1+a^2} = \frac{A}{\pi(1+a^2)}(e^{a\pi} - e^{-ax}).$$
Donc
$$A = \frac{\pi}{2\sinh(ax)},$$
et la fonction f est donc la fonction 2π-périodique impaire qui vaut
$$f(x) = \pi\frac{\sinh(ax)}{\sinh(a\pi)}$$
sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$.

Exercice 2

1. Les dérivées $\frac{\partial T_L}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ étant toutes deux nulles, T_L est solution de l'équation de la chaleur. D'autre part, pour tout t, $T_L(0,t) = 0$ et $T_L(2,t) = 1$, donc T_L est solution des équations 1 et 2.
Réciproquement, soit T une solution indépendante de t. Cela signifie que $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Donc d'après l'équation de la chaleur, on doit avoir $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$. On intègre cette dernière équation : $\frac{\partial T}{\partial x} = a$, a étant une constante par rapport à la variable x. On intègre de nouveau : $T(x,t) = ax + b$, b étant aussi une constante par rapport à x. Comme T ne dépend pas de t, a et b n'en dépendent pas non plus et sont des constantes réelles. Enfin, comme $T(0,t) = 0$ et $T(2,t) = 1$, on trouve $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$. Donc $T = T_L$ et T_L est bien la seule solution indépendante de t.
2. Les fonctions T et T_L vérifiant l'équation de la chaleur, il en est clairement de même pour $\tilde{T}$. Regardons les conditions au bord : pour tout t, $\tilde{T}(0,t) = T(0,t) - T_L(0,t) = 0 - 0 = 0$ et $\tilde{T}(2,t) = T(2,t) - T_L(2,t) = 1 - 1 = 0$. Enfin, à $t = 0$, $\tilde{T}(x,0) = T(x,0) - T_L(x,0) = 1 - \frac{x}{2}$.
3. On remarque que $\tilde{T}$ satisfait les conditions du problème étudié en cours. On sait ainsi que $\tilde{T}$ est de la forme
$\tilde{T}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\frac{k\pi}{2}x)e^{-t(\frac{k\pi}{2})^2}$,
avec pour tout k, $A_k = \frac{2}{2}\int_0^2 (1 - \frac{x}{2})\sin(\frac{k\pi}{2}x)dx$. On obtient $A_k = \frac{2}{k\pi}$.

Donc $\tilde{T}(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}x)e^{-t(\frac{k\pi}{2})^2}$, et
$$T(x,t) = \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}x)e^{-t(\frac{k\pi}{2})^2}.$$
4. Quand t tend vers $+\infty$, les exponentielles convergent vers 0. Plus précisemment
$$|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}x)e^{-t(\frac{k\pi}{2})^2}| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k\pi}|\sin(\frac{k\pi}{2}x)|e^{-t(\frac{k\pi}{2})^2} \leq e^{-t(\frac{\pi}{2})^2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k\pi}|\sin(\frac{k\pi}{2}x)| \longrightarrow_{t\mapsto+\infty} 0.$$
Donc la série converge vers 0. La température limite dans la barre se répartit donc selon la fonction $T_{lim} = \dfrac{x}{2}$.