Examen de rattrapage

La calculatrice est autorisée. Les documents sont interdits.
Toutes vos réponses doivent être soigneusement rédigées.
Barême envisagé : 3-3-6-8.

Exercice 1 : équation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(x) + xy(x) = x.$$

Déterminer et représenter la solution de (E) vérifiant $y(0) = 2$.

Exercice 2 : transformée de Laplace et théorie du signal

On considère un signal entrant e transformé en un signal sortant $s = e * h$, où h est la fonction de transfert définie par $h(t) = \cos(t)$.
On a reçu le signal $s(t) = t$. Retrouver le signal e en utilisant la tranformée de Laplace.

Quelques propriétés de la transformée de Laplace :

$$L(f')(p) = pL(f)(p) - f(0^+), \qquad L(f^{(n)}) = p^n L(f) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+),$$

$$L(f(t-a))(p) = e^{-ap} L(f)(p), \qquad L(e^{-at} f(t))(p) = L(f)(p+a), \qquad L(f * g) = L(f)L(g),$$

$$L(1)(p) = \frac{1}{p}, \qquad L(t^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad L(e^{-at}) = \frac{1}{p+a},$$

$$L(t^n e^{-at}) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}, \qquad L(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \qquad L(\cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Exercice 3 : conduction thermique dans une boule

On considère une boule homogène en cuivre de rayon $R = 0,1m$. Elle est initialement à température constante $T_0 = 100^\circ$. On la plonge dans un milieu à 0°.

L'évolution de la température en un point de la boule ne dépendra que de sa distance à l'origine. La température $T(r,t)$ est donnée par l'équation de la chaleur (en coordonnées sphérique) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c\left(\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right),$$

où $c = 117 \cdot 10^{-6} m^2 s^{-1}$ est le coefficient de diffusivité thermique du cuivre.

On a vu que les solutions stationnaires associées à ce problème sont, pour $k \geq 1$, les fonctions de la forme

$$T_k(r,t) = \operatorname{sinc}(k\pi\frac{r}{R})\exp(-\frac{ck^2\pi^2}{R^2}t).$$

On rappelle que la fonction *sinus cardinal* est définie par $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

1. Montrer que la solution du problème vérifiant la condition initiale, est la fonction $T(r,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k T_k(r,t)$, avec pour tout k, $A_k = 2T_0(-1)^{k+1}$.
   On se ramènera à une série de Fourier d'une fonction $2R$-périodique impaire dont on pourra calculer les coefficients.
2. Donner une valeur approximative de la température au centre de la boule après $10s$.

Rappel : les coefficients de Fourier d'une fonction f $2R$-périodique impaire sont donnés par

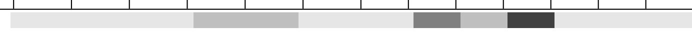
$$\forall k \geq 1, \quad b_k = \frac{2}{R}\int_0^R f(r)\sin(k\pi\frac{r}{R})dr.$$

Exercice 4 : convolution discrète et traitement de l'image

Le produit de convolution est utilisé en traitement de l'image pour améliorer la qualité des images. Une image obtenue à l'aide d'un appareil l'est en général sous forme discrète (pixelisée) et la convolution permet de lisser l'image, c'est-à-dire d'atténuer les contrastes dûs à la pixélisation. C'est ce que nous allons étudier ici.

Pour simplifier, nous considérerons une image grise de dimension 1 et quitte à considérer qu'elle est blanche sur les côtés de l'image, on peut la supposer de longueur infinie. Sa version discrète obtenue par un appareil peut alors être représentée par un tableau de la forme

$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\cdots$	0	0	0	1	1	0	0	2	1	3	0	0	0	$\cdots$



La première ligne donne la numérotation des pixels. La seconde donne les niveaux de gris de l'image en chaque pixel : plus la valeur est élevée, plus l'image est sombre. La dernière ligne donne une idée de l'image étudiée.

On représente un tel tableau par une fonction f définie sur $\mathbf{Z}$ (sur notre exemple, $f(-3) = 1$). Pour deux telles fonctions f et g, la convolution discrète est la fonction définie par

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad f * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k).$$

1. **Exemples**

   On considère les deux images suivantes que nous noterons f et g.

$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\cdots$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	$\cdots$

$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\cdots$	0	0	0	0	2	3	4	6	4	3	2	0	0	$\cdots$

   (a) Déterminer les deux images obtenues après convolution avec la fonction c_1 suivante.

$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\cdots$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	$\cdots$

   Exemple : le pixel 3 de l'image $c_1 * f$ est donné par

   $$\begin{aligned} c_1 * f(3) = \textstyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_1(k)f(3-k) &= \cdots + c_1(-1)f(4) + c_1(0)f(3) + c_1(1)f(2) + \cdots \\ &= \tfrac{1}{3} \times 0 + \tfrac{1}{3} \times 1 + \tfrac{1}{3} \times 1 = \tfrac{2}{3} \approx 0,66. \end{aligned}$$

   Décrire l'action de cette convolution sur les images.

   (b) Déterminer les deux images obtenues après convolution avec la fonction c_2 suivante.

$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\cdots$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0	$\cdots$

   Quelle différence y a-t-il avec l'action de c_1 ? Quel peut être l'avantage de l'une ou de l'autre pour la qualité de l'image obtenue ?

(c) Déterminer les deux images obtenues après convolution avec la fonction c_3 suivante.

$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\cdots$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	$\cdots$

Décrire l'action de cette convolution sur les images.

2. **Quelques remarques sur la convolution discrète**

(a) Montrer qu'il existe un analogue de la distribution de Dirac, c'est-à-dire une fonction c telle que pour toute fonction f, $c * f = f$.

(b) Soit c une fonction telle que $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c(k) = 1$. Montrer que pour toute fonction constante λ, on a pour tout n, $c * \lambda(n) = \lambda$.

Autrement dit, une image unie n'est pas modifiée par l'action de c. C'est une propriété que l'on attend d'une fonction de lissage.

(c) Évidemment les images sont en général bidimensionnelles et il faut donc considérer des fonctions définies sur $\mathbf{Z}^2$. On peut les représenter à l'aide d'une matrice de taille infinie.

Proposer une définition de la convolution discrète pour les fonctions définies sur $\mathbf{Z}^2$.

(d) Proposer des fonctions de lissage analogues à celles vues dans la première partie.

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Un exemple d'image bidimensionnelle