Examen de rattrapage

La calculatrice et les documents sont interdits.
Toutes vos réponses doivent être soigneusement rédigées.
Barême envisagé : 7-7-6.

Exercice 1 : Équation de la chaleur

On considère une barre de longueur 1 en contact à l'une de ses extrêmités avec un milieu à température constante de 0°. À l'instant $t = 0$, l'autre extrêmité est mise en contact avec un milieu à 1°. On souhaite décrire l'évolution de la température dans la barre.

Les données du problèmes sont les suivantes :

$$\text{Équation de la chaleur :} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$\text{Conditions au bord :} \quad \forall t > 0 \ \ T(0,t) = 0 \ \text{ et } \ T(1,t) = 1 \tag{2}$$

$$\text{Condition initiale :} \quad \forall x \in]0,1[\ \ T(x,0) = 0 \tag{3}$$

1. Montrer que la fonction $T_L(x,t) = x$ est la seule solution aux équations 1 et 2 qui soit indépendante de t.
2. Soit T la solution du problème. On pose $\tilde{T} = T - T_L$.
   Montrer que $\tilde{T}$ vérifie l'équation de la chaleur. Donner les conditions au bord et la condition initiale pour $\tilde{T}$.
3. En déduire l'expression de $\tilde{T}$ puis celle de T.
4. Comment se répartit la température dans la barre après un temps suffisamment grand ? Représenter l'évolution de la température de la barre au cours du temps.

Rappels : Pour une barre de longueur L en contact à ses deux extrêmités avec des milieux à 0° et dont la température initiale est donnée par une fonction T_0, sa température T est solution du système d'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad \forall t > 0 \ \ T(0,t) = 0 \ \ et \ \ T(L,t) = 0, \qquad \forall x \in]0,L[\ \ T(x,0) = T_0(x),$$

et l'unique solution est donnée par

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin(\frac{k\pi}{L}x) e^{-t(\frac{k\pi}{L})^2},$$

avec pour tout k,

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L T_0(x) \sin(\frac{k\pi}{L}x) dx.$$

Exercice 2 : Transformée de Laplace des fonctions de Bessel

Le but de cet exercice est de calculer la transformée de Laplace de la fonction de Bessel J_0. On rappelle que J_0 vérifie l'équation différentielle

$$xJ_0'' + J_0' + xJ_0 = 0,$$

et $J_0(0) = 1$. Nous noterons $Y = L(J_0)$ la transformée de Laplace de la fonction J_0.

1. En utilisant les propriétés données plus bas, montrer que
$$L(xJ_0'')(p) = -p^2 Y'(p) - 2pY(p) + 1.$$
2. Déduire de l'équation satisfaite par J_0 que Y satisfait l'équation différentielle
$$(p^2 + 1)Y' + pY = 0.$$
3. Montrer que $Y(p) = L(J_0)(p) = \frac{\lambda}{\sqrt{p^2+1}}$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$.
4. Déterminer λ à l'aide de la quatrième propriété ci-dessous.
5. Déduire du résultat précédent la valeur du produit de convolution $J_0 * J_0$.

Quelques propriétés de la transformée de Laplace :
- $L(f')(p) = pL(f)(p) - f(0^+)$.
- $L(f'')(p) = p^2 L(f)(p) - pf(0^+) + f'(0^+)$.
- $L(xf(x))(p) = -(L(f))'(p)$.
- $\lim_{p\to+\infty} pL(f)(p) = f(0^+)$.
- $L(f * g) = L(f)L(g)$.

Quelques tranformées de Laplace classiques :
- $L(e^{-at})(p) = \frac{1}{p+a}$.
- $L(\sin(\omega t))(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.
- $L(\cos(\omega t))(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$.

Rappelons enfin que la transformée de Laplace est définie par $L(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$, où f est une fonction définie sur $\mathbf{R}_+$. En toute rigueur, ce n'est pas la fonction J_0 que l'on considère dans cet exercice, mais la fonction qui est nulle sur $\mathbf{R}_-^*$ et qui vaut J_0 sur $\mathbf{R}_+$. Cela n'a aucune importance dans l'exercice si ce n'est pour pouvoir considérer correctement le produit de convolution $J_0 * J_0$.

Exercice 3 : Transformée de Fourier et filtrage d'un signal brouillé.

Un signal f est émis. Malheureusement, ce signal est brouillé par la présence d'un bruit α. Ainsi, le signal finalement capté est $g = f + \alpha$ (voir figures au dos). Le but de cet exercice est de retrouver le signal f à partir de ce signal g.

On considère que le bruit α est un bruit gaussien aléatoire d'écart-type 1. Pour des raisons probabilistes, on est presque sûr que la moyenne $|\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t)dt|$ est inférieure à $0,1$. Mieux, on pourra considérer que pout tout réel λ,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t) e^{-i\lambda t} \right| < 0,1.$$

1. D'après l'énoncé, quel est l'ordre de grandeur du bruit α ?
2. Pour tout réel λ, donner une majoration de $|\hat{g}(\lambda) - \hat{f}(\lambda)|$. En déduire que le bruit a moins d'incidence sur la transformée de Fourier de f que sur f elle-même.

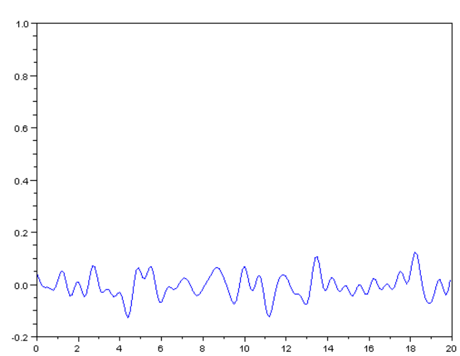
   On a évalué pour $\lambda \in [-20, 20]$ la fonction $\hat{g}$. Afin de pouvoir raisonner avec des valeurs réelles, on a représenté ci-dessous les courbes des fonctions $a_\lambda(g) = \hat{g}(\lambda) + \hat{g}(-\lambda)$ et $b_\lambda(g) = i(\hat{g}(\lambda) - \hat{g}(-\lambda)$. Ces courbes représentent le spectre réel de g. Elles peuvent être interprétées comme étant les courbes des coefficients de Fourier réels continus de g.
   On peut observer sur la première courbe que les valeurs de $a_\lambda(g)$ sont proches de 0. On peut en déduire que g n'a pas de "composante en cosinus" et qu'elle est globalement impaire.

3. Quels sont les termes non négligeables sur la seconde courbe ? En déduire une approximation simple de la fonction f par une fonction trigonométrique.
4. Quel est l'intérêt ici d'utiliser la transformation de Fourier pour retrouver f ? Aurait-on pu retrouver f directement à partir du signal g ?

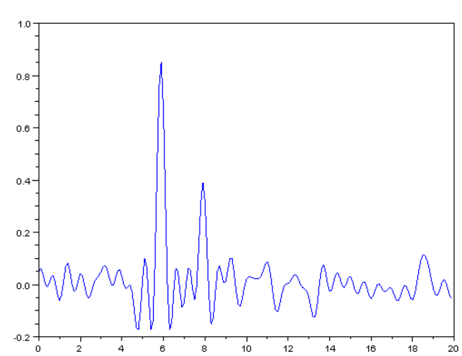
Rappel : la transformée de Fourier d'une fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

On donne ci-dessous les courbes $a_\lambda(g)$ et $b_\lambda(g)$. Elles représentent le spectre de g et peuvent être comparées à des spectres de Fourier discrets.

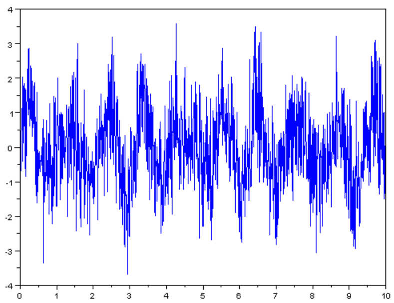


Valeurs de $a_\lambda(g)$

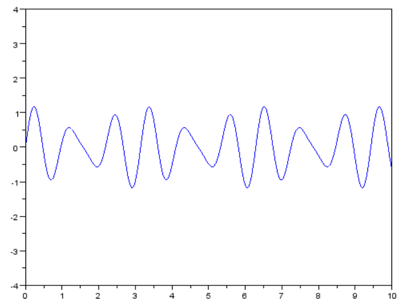


Valeurs de $b_\lambda(g)$

On donne ci-dessous les courbes de g et f. Le signal f est censé être inconnu et n'est donné qu'à titre indicatif.



Le signal bruité g



Le signal initial f