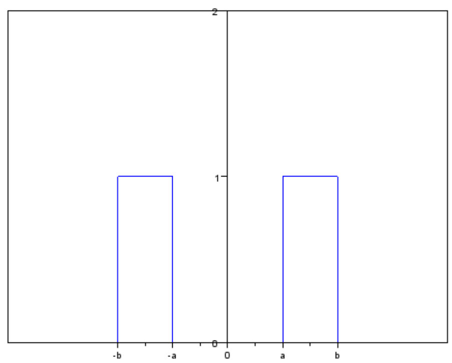
Contrôle

La calculatrice et les documents sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barème donné à titre indicatif : 7, 13.

Exercice 1 : Transformées de Fourier et Laplace.

Soient $b > a > 0$ des nombres réels. On note T la fonction $\mathbf{1}_{[-b,-a]} + \mathbf{1}_{[a,b]}$:



Graphe de T.

1. En supposant qu'on peut appliquer le théorème d'inversion de Fourier, déterminer une fonction h telle que sa transformée de Fourier soit égale à T : $\hat{h} = T$.
2. On considère le filtre qui à tout signal entrant e associe le signal sortant $s = e * h$. Décrire l'action de ce filtre sur un signal entrant quelconque.
   On pourra raisonner sur les spectres de Fourier de e et s.
3. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$.
4. En déduire la transformée de Laplace de la fonction $h \times u$, où u désigne l'échelon unité.

Formules utiles :

La transformée de Fourier d'une fonction f est définie par $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}dx$.

Sous certaines hypothèses, le théorème d'inversion permet d'affirmer $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{itx}dt$.

La transformée de Laplace d'une fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ est $L(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$.

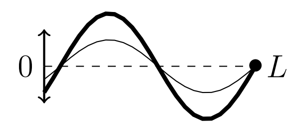
Propriétés :

$$L(\sin(t))(p) = \frac{1}{p^2+1}, \quad L(tf(t))(p) = -(L(f))'(p), \quad \lim_{p\to\infty} L(f)(p) = 0, \quad L(f(\lambda t))(p) = \frac{1}{\lambda}L(f)(\frac{p}{\lambda}).$$

Si $x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 : Corde de Melde.

On considère une corde de longueur L. Elle est fixée en l'une de ses extrémités. En l'autre extrémité, un opérateur impose à la corde un mouvement sinusoïdal vertical. En négligeant les frottements de l'air et le poids de la corde, le mouvement de la corde est décrit par l'équation des ondes. On note $y(x,t)$ la hauteur de la corde en x à l'instant t. Le problème est ainsi modélisé par les équations suivantes :



- Équation des ondes : $\forall x, \forall t, \ \ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$,
- Condition en $x = L$: $\forall t, \ \ y(L,t) = 0$,
- Condition en $x = 0$: $\forall t, \ \ y(0,t) = \alpha \sin(\omega t)$,

où ω est la pulsation de l'oscillation forcée et α est une constante petite devant L.

Le but de cet exercice est de déterminer les solutions stationnaires de ce problème. On considère donc une solution y de la forme $y(x,t) = U(x)V(t)$.

1. Résolution.
   (a) Montrer qu'il existe une constante réelle λ telle que $U''(x) = \lambda U(x)$ et $V''(t) = \lambda V(t)$.
   (b) En utilisant une des conditions au bord, déterminer l'expression de $V(t)$. En déduire que $\lambda = -\omega^2$.
   (c) Résoudre l'équation satisfaite par U.
   Pour la suite, on pourra utiliser le fait qu'une expression de la forme $a\cos(z)+b\sin(z)$ *où* a, b *et* z *sont des réels peut s'écrire sous la forme* $c\sin(z+\theta)$, *où* c *et* θ *sont des réels.*
   (d) Montrer que l'unique solution stationnaire du problème est la fonction
   $$y(x,t) = \alpha \sin(\omega t) \frac{\sin(\omega(x-L))}{\sin(-\omega L)}.$$

2. Étude de la solution.
   (a) Représenter l'allure de la corde pour $L = \pi$, $\omega = \frac{1}{2}$ et α, t quelconques.
   (b) Même question avec $\omega = \frac{3}{2}$.
   (c) Même question avec ω proche de 1 et ω proche de 2.
   (d) Quel phénomène observe-t-on quand ωL est très proche d'un multiple entier de π ? Notre résultat est-il dans ce cas parfaitement rigoureux ?
   (e) Que représente notre solution stationnaire pour le problème général de la corde de Melde ? Si la corde est initialement au repos, comment va-t-elle évoluer au cours du temps ? *On ne demande pas de justification mathématique.*