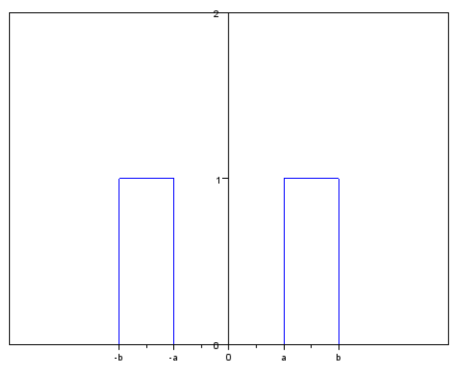
Contrôle

La calculatrice et les documents sont interdits.
Toutes les réponses doivent être justifiées et correctement rédigées.
Barème donné à titre indicatif : 7, 13.

Exercice 1 : Transformées de Fourier et Laplace.

Soient $b > a > 0$ des nombres réels. On note T la fonction $\mathbf{1}_{[-b,-a]} + \mathbf{1}_{[a,b]}$:



Graphe de T.

1. En supposant qu'on peut appliquer le théorème d'inversion de Fourier, déterminer une fonction h telle que sa transformée de Fourier soit égale à T : $\hat{h} = T$.

   Appliquons le théorème d'inversion à h et sa transformée $\hat{h}$:

   $$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(x)e^{itx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}(x)e^{itx}dx.$$

   Donc

   $$h(t) = \frac{1}{2\pi}(\int_{-b}^{-a} \hat{e}^{itx}dx - \int_{a}^{b} \hat{e}^{itx}dx) = \frac{1}{2\pi it}(e^{-iat} - e^{-ibt} + e^{ibt} - e^{iat}) = \frac{\sin(bt) - \sin(at)}{\pi t}.$$

   On peut également écrire $h(t) = \frac{b}{\pi}\sin c(bt) - \frac{a}{\pi}\sin c(at)$.

2. On considère le filtre qui à tout signal entrant e associe le signal sortant $s = e * h$. Décrire l'action de ce filtre sur un signal entrant quelconque.
   On pourra raisonner sur les spectres de Fourier de e et s.

   Comme $s = e * h$, $\hat{s} = \widehat{e * h} = \hat{e} \times \hat{h} = \hat{e} \times T$. Mais comme T est nulle en dehors des intervalles $[-b, -a]$ et $[a, b]$ et vaut 1 sur ces intervalles, on obtient $\hat{s} = \hat{e}_{|_{[-b,-a]}} + \hat{e}_{|_{[a,b]}}$. Autrement dit, l'action du filtre sur le spectre de e consiste à ne garder que la partie du spectre située sur ces intervalles. Ainsi, toutes les fréquences du signal e non comprises entre a et b ont été supprimées et celles comprises entre a et b ont été inchangées. Ce filtre est simplement un filtre passe-bande.

3. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$.

   Posons $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$. Alors $tf(t) = \sin(t)$. Or $L(tf(t))(p) = -(L(f))'(p)$. Ainsi $L(f)'(p) = -L(\sin)(p) = \frac{-1}{1+p^2}$. En intégrant, on obtient $L(f)(p) = -arctan(p) + k$ avec $k \in \mathbf{R}$. Or la transformée de laplace de f doit converger vers 0 en $+\infty$, donc $k = \frac{\pi}{2}$. Finalement

   $$L(\frac{\sin(t)}{t})(p) = -arctan(p) + \frac{\pi}{2} = arctan(\frac{1}{p}).$$

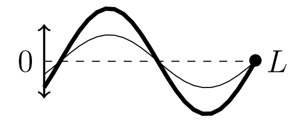
4. En déduire la transformée de Laplace de la fonction $h \times u$, où u désigne l'échelon unité.

   On a montré que $h(t) = \frac{b}{\pi}\frac{\sin(bt)}{bt} - \frac{a}{\pi}\frac{\sin(at)}{at}$. Or $\frac{\sin(at)}{at} = f(at)$, et $L(f(at))(p) = \frac{1}{a}L(f)(\frac{p}{a}) = \frac{1}{a}arctan(\frac{a}{p})$. De même, $L(f(at))(p) = \frac{1}{b}arctan(\frac{b}{p})$. Donc, en utilisant la linéarité de la transformée de Laplace

   $$L(h)(p) = \frac{b}{\pi}\frac{1}{b}arctan(\frac{b}{p}) - \frac{a}{\pi}\frac{1}{a}arctan(\frac{a}{p}) = \frac{1}{\pi}(arctan(\frac{b}{p}) - arctan(\frac{a}{p})).$$

Exercice 2 : Corde de Melde.

On considère une corde de longueur L. Elle est fixée en l'une de ses extrémités. En l'autre extrémité, un opérateur impose à la corde un mouvement sinusoïdal vertical. En négligeant les frottements de l'air et le poids de la corde, le mouvement de la corde est décrit par l'équation des ondes. On note $y(x,t)$ la hauteur de la corde en x à l'instant t. Le problème est ainsi modélisé par les équations suivantes :



- Équation des ondes : $\forall x, \forall t, \ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$,
- Condition en $x = L$: $\forall t, \quad y(L,t) = 0$,
- Condition en $x = 0$: $\forall t, \quad y(0,t) = \alpha \sin(\omega t)$,

où ω est la pulsation de l'oscillation forcée et α est une constante petite devant L.

Le but de cet exercice est de déterminer les solutions stationnaires de ce problème. On considère donc une solution y de la forme $y(x,t) = U(x)V(t)$.

1. Résolution.
   (a) Montrer qu'il existe une constante réelle λ telle que $U''(x) = \lambda U(x)$ et $V''(t) = \lambda V(t)$.

   La fonction $y(x,t) = U(x)V(t)$ est solution de l'équation des ondes. On injecte : $U(x)V''(t) = U''(x)V(t)$. Donc $\frac{V''(t)}{V(t)} = \frac{U''(x)}{U(x)}$. On obtient une égalité entre deux fontions de variables différentes. Nécessairement, ces deux fonctions sont égales à une même constante réelle λ : $\frac{V''(t)}{V(t)} = \frac{U''(x)}{U(x)} = \lambda$. On en déduit $U''(x) = \lambda U(x)$ et $V''(t) = \lambda V(t)$.

   (b) En utilisant une des conditions au bord, déterminer l'expression de $V(t)$. En déduire que $\lambda = -\omega^2$.

   En $x = 0$, on doit avoir $y(0,t) = U(0)V(t) = \alpha \sin(\omega t)$. On en déduit que $V(t) = \frac{\alpha \sin(\omega t)}{U(0)}$. Notons que cela implique que $U(0)$ soit non nul.
   On peut ainsi déterminer V'' : $V''(t) = -\alpha\omega^2 \sin(\omega t)/U(0)$. or on doit avoir $V'' = \lambda V$. Donc $-\alpha\omega^2 \sin(\omega t)/U(0) = \lambda\alpha \sin(\omega t)/U(0)$ pour tout t. On en déduit $\lambda = -\omega^2$.

   (c) Résoudre l'équation satisfaite par U.

   L'équation satisfaite par U devient alors $U'' = -\omega^2 U$. C'est une équation linéaire d'ordre 2 à coefficients constant bien connue. Ses solutions sont les fonctions de la forme
   $$U(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$
   Une telle fonction peut s'écrire sous la forme
   $$U(x) = c\sin(\omega x + \theta).$$

   (d) Montrer que l'unique solution stationnaire du problème est la fonction
   $$y(x,t) = \alpha \sin(\omega t)\frac{\sin(\omega(x-L))}{\sin(-\omega L)}.$$

   On a finalement démontré que y est de la forme $y(x,t) = \frac{\alpha \sin(\omega t}{U(0)} \times c\sin(\omega x + \theta)$. Reste à satisfaire la seconde condition aux bord. En $x + L$, $y(L,t) = 0$, donc $\frac{\alpha \sin(\omega t}{U(0)} \times c\sin(\omega L + \theta) = 0$ pour tout t. On en tire $\sin(\omega L + \theta) = 0$ et donc $\omega L + \theta = k\pi$

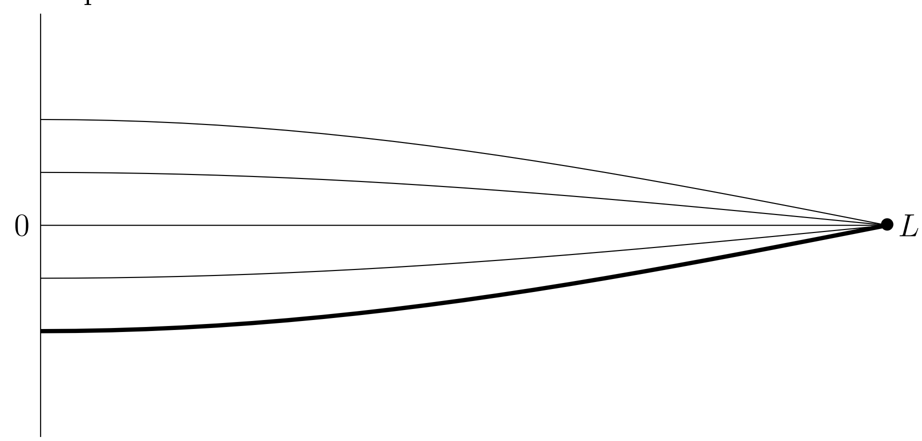
où k est un entier. Donc $\theta = -\omega L + k\pi$ et $\sin(\omega x + \theta) = \sin(\omega(x - L) + k\pi) = (-1)^k \sin(\omega(x - L))$.
Donc $U(x) = (-1)^k c \sin(\omega(x - L))$ et en particulier $U(0) = (-1)^k c \sin(-\omega L)$. On obtient finalement

$$y(x, t) = \alpha \sin(\omega t) \frac{\sin(\omega(x - L))}{\sin(-\omega L)}.$$

Notre problème ne possède donc qu'une seule solution stationnaire.

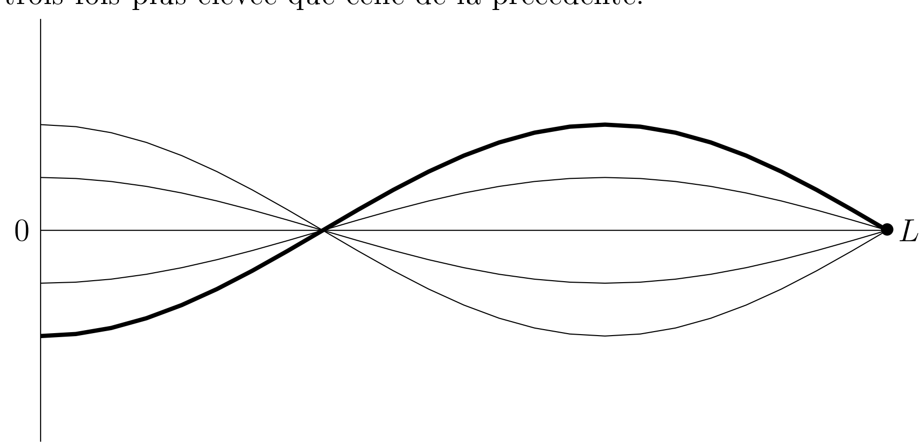
2. Étude de la solution.
   (a) Représenter l'allure de la corde pour $L = \pi$, $\omega = \frac{1}{2}$ et α, t quelconques.

   À une constante près, il s'agit de représenter sur $[0, L]$ la fonction $x \mapsto \sin(\frac{x-\pi}{2})$. On peut reconnaître $-\cos(\frac{x}{2})$. On trace ci-dessous plusieurs positions de la corde correspondants à différents instants t afin de visualiser son oscillation.



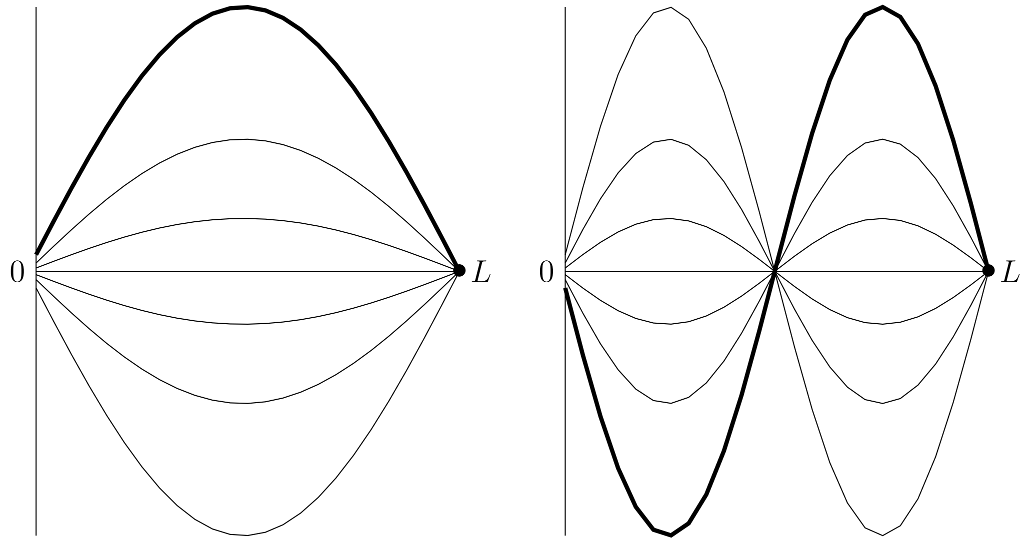
   (b) Même question avec $\omega = \frac{3}{2}$.

   Même type de fonction que la précédente. Remarquons juste que la fréquence est trois fois plus élevée que celle de la précédente.



   (c) Même question avec ω proche de 1 et ω proche de 2.

   Il faut ici remarquer ceci : si ω est proche de 1 ou 2, $\sin(-\omega L)$ est proche de 0. Ainsi l'amplitude du mouvement vertical de la corde sera bien plus importante que dans le deux cas précédents.



Ces vibrations ressemblent beaucoup aux modes de vibration naturels (à fréquence 1 et 2) de la corde fixée en ses deux extémités.

(d) Quel phénomène observe-t-on quand ωL est très proche d'un multiple entier de π ? Notre résultat est-il dans ce cas parfaitement rigoureux ?

Quand ωL est très proche d'un multiple entier de π, $\sin(-\omega L)$ est très proche de 0 et l'amplitude de notre solution est alors très grande. Pour notre corde de longueur π, les fréquences entières sont les fréquences propres. Elles correspondent aux modes de vibrations naturels de la corde. Ainsi, nous sommes dans un cas où la fréquence imposée par l'opérateur est quasiment égale à une fréquence propre de la corde. Il y a alors un phénomène de résonnance qui se traduit par de grandes oscillations.
La solution que nous avons alors obtenue n'est alors pas rigoureuse car notre modèle ne l'est plus. L'équation des ondes utilisée n'est valable que pour de petites oscillations de la corde ce qui n'est ici plus le cas.
Notre solution mathématique peut prendre des valeurs aussi grandes que voulues, ce qui est évidemment impossible. On comprend que pour de telles oscillations, on ne peut plus se contenter d'une description locale de la corde mais qu'il faut incorporer au modèle des conditions globales sur la corde. Notons enfin que notre problème n'a pas de solution si on prend ω égal à une fréquence propre de la corde. Pour une telle fréquence, on trouve nécessairement $U(0) = 0$ ce qui contredit notre résultat de la question 1.

(e) Que représente notre solution stationnaire pour le problème général de la corde de Melde ? Si la corde est initialement au repos, comment va-t-elle évoluer au cours du temps ?

La solution étudiée correspond à ce qu'on appelle assez logiquement le régime stationnaire. C'est le mode de vibration naturel de la corde sous l'action de l'opérateur. Quelque soit la situation initiale de la corde, c'est vers cette solution que va converger le système. La solution générale du système n'est pas stationnaire mais tend à le devenir. Soumise à l'oscillation en $x = 0$, la corde initialement au repos va se mettre en mouvement et va peu à peu vibrer à la fréquence ω pour finir, à la limite, à vibrer selon la fonction y obtenue.