Solitons

Ce devoir est à faire par groupes de deux étudiants maximum. Il est à rendre pour le 9 décembre.

Un exemple naturel de propagation d'ondes est le phénomène des vagues sur la mer. Certaines vagues sont particulièrement étonnantes : les vagues scélérates ou les mascarets. Les ondes correspondantes sont appelées en physique des solitons. Elles interviennent dans plusieurs domaines. Le but de ce problème est d'en proposer une modélisation et d'en étudier certaines propriétés.

1. Effectuer des recherches et proposer une description des phénomènes observés et de ce qu'on appelle un soliton.

Une des difficultés posées par les solitons est leur modélisation. La plupart des équations classiques modélisant les problèmes de propagation ne possèdent pas de solutions ressemblant à des solitons.
L'équation de Korteweg et de Vries (KdV) est le premier modèle convenable. On considère des vagues, dans un milieu de faible profondeur, se propageant dans une seule direction. Si on note $\varphi(x,t)$ le niveau de l'eau à l'abscisse x à l'instant t, alors l'évolution de φ est donnée par l'équation KdV (simplifiée) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 6\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0.$$

La Vague d'Hokusai.

1 L'équation KdV linéarisée

Afin de bien comprendre la difficulté d'établir l'existence de solitons, nous allons commencer par étudier une autre équation que l'équation KdV.
L'équation de KdV linéarisée est

$$(E) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0.$$

Nous n'allons pas résoudre complètement l'équation. Nous cherchons une solution correspondant à une onde se propageant à vitesse constante : sa forme globale reste la même, mais elle se déplace au cours du temps. Cela revient à chercher une solution φ de (E) sous la forme $\varphi(x,t) = f(x - vt)$ avec $v > 0$.

1. En notant $y = x - vt$, montrer que f est solution de
$$-vf'(y) + f^{(3)}(y) = 0.$$
2. Intégrer l'équation puis la résoudre.
3. Les solutions φ obtenues sont-elles des solitons ? Quel est le lien entre la vitesse de propagation et la fréquence de la solution obtenue ?
4. Considérons une vague qui, à l'instant $t = 0$, a la forme d'un soliton. On peut la décomposer, avec une transformée de Fourier, en une combinaison de fonctions sinusoïdales. D'après le résultat de la question précédente, comment va évoluer la vague ? On parle de dispersion de l'onde.

2 Résolution de l'équation KdV

Comme dans la partie précédente, nous ne cherchons pas toutes les solutions de l'équation KdV mais seulement une solution φ de la forme $\varphi(x,t) = f(x - vt)$.

1. En notant $y = x - vt$, montrer que f est solution de l'équation
$$-vf'(y) + 6f(y)f'(y) + f^{(3)}(y) = 0.$$
2. En intégrant cette équation deux fois, montrer
$$-\frac{v}{2}f^2 + f^3 + \frac{1}{2}(f')^2 = Af + B,$$
où A et B sont des constantes réelles.
3. La solution que l'on cherche est une onde "plate" à l'infini. On impose donc que les limites de φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ soient nulles quand x tend vers l'infini.
En déduire que A et B sont nulles.
4. Poser $g(y) = \frac{1}{\sqrt{f(y)}}$. Montrer $\dfrac{\sqrt{2}g'}{\sqrt{\frac{v}{2}g^2 - 1}} = \pm 1$.
5. En utilisant $\operatorname{argcosh}'(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$, montrer qu'on obtient finalement une solution
$$\varphi(x,t) = \frac{v}{2\cosh^2(\frac{\sqrt{v}}{2}(x - vt))}.$$

3 Étude des solitons

On considère la solution φ obtenue à la question précédente.

1. Exprimer la hauteur maximale de l'onde en fonction de sa vitesse de propagation v.
2. Que peut-on dire de la "largeur" de l'onde en fonction de v ?
3. Représenter les allures des solutions obtenues pour $v = 1$ et $v = 2$ à $t = 0$ et pour une autre valeur de t.
4. La propagation des tsunamis sur les océans est relativement bien modélisée par l'équation KdV. Est-ce normal ? Faire des recherches et décrire qualitativement le phénomène.

4 Collision de solitons

1. Pourquoi la somme de deux solitons n'est-elle a priori pas une solution de l'équation KdV ?
2. Il existe néanmoins des solutions qui sont, d'une certaine manière, composées de plusieurs solitons. En voici une :

$$\varphi(x,t) = (v_2 - v_1)\frac{\frac{v_2}{2}\mathrm{csch}^2(\frac{\sqrt{v_2}}{2}(x - v_2 t)) + \frac{v_1}{2}\mathrm{sech}^2(\frac{\sqrt{v_1}}{2}(x - v_1 t))}{(\sqrt{v_2}\coth(\frac{\sqrt{\mathrm{v}_2}}{2}(\mathrm{x} - \mathrm{v}_2\mathrm{t})) - \sqrt{\mathrm{v}_1}\tanh(\frac{\sqrt{\mathrm{v}_1}}{2}(\mathrm{x} - \mathrm{v}_1\mathrm{t})))^2},$$

   où $\mathrm{csch} = 1/\sinh$, $\mathrm{sech} = 1/\cosh$, $\coth = \cosh/\sinh$ et $\tanh = \sinh/\cosh$.

   Justifier le fait que cette fonction ressemble à une somme de deux solitons : que vaut à peu près cette fonction lorsque $x - v_1 t$ est proche de 0 et $|x - v_2 t|$ est très grand ? Même question lorsque $x - v_2 t$ est proche de 0 et $|x - v_1 t|$ est très grand.
3. On suppose $v_1 > v_2$. Représenter cette fonction pour différentes valeurs de t.
4. L'existence de cette solution permet d'expliquer la cohabitation possible de plusieurs solitons. Mieux, cela signifie que ceux-ci peuvent interférer (entrer en collision), sans qu'il n'y ait de perturbation apparente.
   Cette propriété rend ces ondes particulièrement intéressantes. Donner un exemple de domaine où l'on utilise des solitons et en expliquer la raison.

On peut trouver beaucoup d'articles intéressants en ligne ou de livres sur le sujet. Voici par exemple un dossier assez complet provenant de l'INSA de Lyon :
http ://eurinsa.insa-lyon.fr/LesCours/physique/AppPhysique/approphys/9Math&Phys/index/index.htm