Le diapason

Ce devoir est à faire par groupes de deux étudiants maximum. Il est à rendre pour le 14 décembre.

Le diapason est un outil de musicien constitué de deux branches métalliques épaisses parallèles, soudées en forme de U et prolongées par une tige. Son intérêt principal est que lorsque l'on frappe l'une des deux branches, il émet un son pratiquement pur (typiquement un La à 440 Hz) ce qui aide à accorder d'autres instruments.

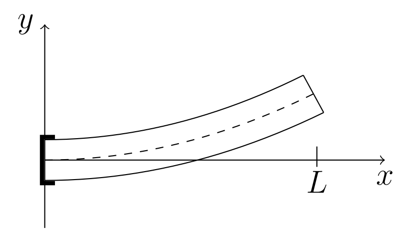
L'objectif de ce devoir est de comprendre pourquoi le son émis par le diapason est pur.

1 Poutre encastrée

Pour décrire la vibration du diapason, nous utiliserons un modèle très simpliste. Nous ne considèrerons ici qu'une seule branche et nous l'assimilerons à une poutre dont l'une des extrémités est encastrée et l'autre est libre. On entend par poutre un solide ayant une longueur, une largeur et une épaisseur (ce qui la distingue de la corde vibrante) mais dont la longueur est bien plus grande que les deux autres dimensions.

La modélisation de la vibration d'une poutre est bien plus difficile que celle de la corde vibrante car il faut intégrer toutes les forces internes que subit le matériau (torsion, flexion, cisaillement, etc, demandez à vos collègues de GM ou GC).

Nous ne considérerons que les vibrations verticales de la poutre, supposées faibles, et nous noterons $y(x,t)$ la hauteur de la partie centrale de la poutre à l'abscisse x et à l'instant t. La longueur de la poutre sera égale à $L = 10$ cm. La poutre est encastrée en $x = 0$ et libre en $x = L$.



Le modèle le plus simple permet de décrire le mouvement de la poutre par l'équation d'Euler-Bernoulli

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial^4 y}{\partial x^4},$$

où μ est une constante positive dépendant du matériau de la poutre. Pour le diapason, on a $\mu \approx 1,6\ m^4 s^{-2}$.

Les conditions aux bords sont les suivantes :

- l'encastrement se traduit par $y(0,t) = 0$ et $\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$,

- le fait que la poutre soit libre par $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L,t) = 0$ (absence de moment, pas de courbure) et $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L,t) = 0$ (pas de force de cisaillement).

Une fois le modèle posé, la méthode de résolution est sensiblement la même que pour la corde vibrante. Le point essentiel est de déterminer les modes propres de vibration de la poutre, c'est-à -dire les solutions stationnaires du problème. On cherche donc une solution du problème de la forme $y(x,t) = U(x)V(t)$.

1. Montrer qu'il existe une constante α telle que U soit de la forme

$$U(x) = A_1 \mathrm{ch}(\alpha x) + A_2 \mathrm{sh}(\alpha x) + A_3 \cos(\alpha x) + A_4 \sin(\alpha x).$$

   On admettra que la constante qui apparaît dans la résolution après la séparation des variables est nécessairement positive.

2. À l'aide des conditions au bord en $x = 0$, exprimer A_3 en fonction de A_1 et A_4 en fonction de A_2.
3. En utilisant chacune des deux autres conditions aux bords, exprimer A_2 en fonction de A_1. Identifier les deux expressions et en déduire que nécessairement

$$\mathrm{ch}(\alpha L) \cos(\alpha L) = -1.$$

4. Déterminer numériquement à l'aide d'un ordinateur les 6 premières valeurs positives possibles de α satisfaisant cette équation. Nous les noterons α_1, α_2, etc. On rappelle que $L = 0,1$ m.
5. Conclure et donner l'expression générale des fonctions U_i correspondantes. Représenter le graphe des fonctions U_1, U_2 et U_3.
6. Déterminer ensuite les fonctions V_i correspondant aux fonctions U_i et conclure en donnant l'expression générale des solutions stationnaires du problème.

Comme pour la corde vibrante, les solutions générales du problème s'écriront comme combinaisons linéaires de solutions stationnaires. Ainsi toute vibration de la poutre pourra se décomposer selon les modes propres de vibrations de la poutre.

2 Son émis par une branche du diapason

Revenons maintenant au diapason. On ne considère toujours qu'une seule de ses branches et on souhaite décrire le son émis par celle-ci lorsqu'elle vibre. Pour cela, il faut étudier la partie temporelle ($V(t)$) des solutions obtenues précédemment. Quitte à simplifier un peu, les modes de vibrations du diapason sont de la forme $y(x,t) = U(x)\cos(\omega t)$ où ω dépend du mode considéré. Ce nombre ω est la fréquence à laquelle vibre le diapason au cours du temps. Ce mouvement du diapason fait vibrer l'air à la même fréquence, créant une onde qui se propage jusqu'à nos oreilles.

1. D'après les résultats de la partie précédente, quelles sont les 6 plus petites fréquences ω présentes dans un son quelconque émis par le diapason ?
Quelle différence observe-ton par rapport aux fréquences présentes dans le son émis par la corde vibrante ?

Nous souhaitons décrire précisément le spectre du son émis par le diapason. Il nous faut pour cela décomposer la vibration du diapason en une combinaison linéaire de modes propres. Comme souvent dans ce genre de problèmes, cela va être facile car les modes propres forment une base orthogonale pour un certain produit scalaire. Ici le produit scalaire correspondant à la géométrie du problème est simplement

$$<f \mid g> = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)g(x)dx.$$

L'ensemble des fonctions U_i obtenues en fixant pour chacune $A_1 = 1$ forme une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Pour faire vibrer le diapason, on le frappe en haut de la branche. La situation peut se modéliser en considérant que la forme initiale de la branche est donnée par la fonction $y_0(x) = 10 \times \mathbf{1}_{[\frac{9L}{10},L]}(x)$ et que la vitesse initiale de la branche est nulle.

2. Calculer (éventuellement avec un ordinateur) les 4 premiers coefficients de la décomposition de y_0 dans la base orthonormée. Représenter le début du spectre du diapason (en respectant bien l'échelle des fréquences). Peut-on dire que le diapason a un son pur ?

3 Atténuation de la vibration

Dans note modèle initial, une fois excité, le diapason ne cessera jamais de vibrer. Nous allons maintenant tenir compte des contraintes internes au matériau et étudier comment chaque mode de vibration s'atténue au cours du temps. Ces contraintes sont difficiles à modéliser. Nous dirons simplement qu'elles sont assimilables à des frottements internes. Ils vont donc s'opposer au mouvement de la poutre et seront d'autant plus fort que la vitesse du diapason, et donc sa fréquence de vibration, sera élevée. Nous considérerons donc que le diapason vibre à l'une de ses fréquences propres ω_i. Le mouvement du diapason est alors modélisé par l'équation (qui ressemble beaucoup à l'équation des ondes amorties)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\omega_i}{500}\frac{\partial y}{\partial t} = -\mu\frac{\partial^4 y}{\partial x^4},$$

le facteur 500 étant lié à la nature du matériau du diapason.

Lors de la recherche des solutions stationnaires $U(x)V(t)$ de cette équation, la détermination de la fonction U est la même que dans la première partie et la constante α qui apparaît est celle correspondant à la fréquence ω_i choisie.

1. Déterminer les solutions $V(t)$ de cette nouvelle équation. Remarquer que la fréquence de la solution stationnaire reste très proche de la fréquence ω_i choisie.
2. Décrire l'évolution des modes propres de vibration au cours du temps.
3. Représenter les spectres du son du diapason au bout d'une seconde et au bout de deux secondes.
4. Peut-on dire que le diapason a un son pur ?

4 Influence de la seconde branche du diapason

Comme on l'a vu, la seconde branche n'est pas nécessaire pour obtenir un son pur. Son intérêt principal est de permettre la formation d'une vibration longitudinale dans la tige du diapason. Le son émis par le diapason est assez faible et la vibration dans la tige permet, une fois le diapason posé sur une caisse de résonance, d'amplifier ce son. Et la présence d'un nœud en haut de la tige permet de tenir le diapason sans affecter la vibration.

Nous allons néanmoins étudier l'influence de cette seconde branche dans la propagation du son dans l'espace. Nous admettrons la propriété suivante : lorsque l'on frappe une branche du diapason, après une phase de transition très rapide, on obtient des vibrations identiques dans les deux branches mais en opposition de phase. Cela se traduit de la manière suivante : si on note $y_1(x,t)$ la vibration de la première branche, alors la vibration de la seconde est $y_2(x,t) = -y_1(x,t)$ (chacune s'écrivant par rapport à la position d'équilibre de la branche).

Nous négligerons ici l'atténuation du son et nous notons v la vitesse de propagation du son dans l'air. Plaçons-nous sur un axe parallèle aux deux branches et situé à des distances d_1 et d_2 de ces deux branches.

1. Exprimer en fonction des ondes y_1 et y_2 l'onde $y(x,t)$ qu'on obtient sur l'axe à l'instant t.
2. Dans quelle direction particulière l'intensité du son obtenu est-elle minimale ?
3. Dans quelle direction devrait-elle être maximale ?