Attracteur de Lorentz

Dans les années 1960, le météorologue Edward Lorentz a proposé un modèle très simplifié d'un certain phénomène atmosphérique afin de mettre en évidence le caractère chaotique des systèmes météorologiques.

Nous allons étudier ce système.

$$\begin{cases} x' &= -10x + 10y \\ y' &= 28x - y - xz \\ z' &= xy - \frac{8}{3}z \end{cases}$$

On pourra s'aider d'un ordinateur pour effecteur les calculs. On pourra également s'appuyer sur la vidéo disponible à l'adresse suivante :

http://www.chaos-math.org/fr/chaos-vii-attracteurs-%C3%A9tranges

Un programme écrit en Octave est fourni pour tracer approximativement des solutions du système. On pourra s'en servir pour visualiser les solutions, voire pour illustrer certaines réponses.

1. Déterminer les points d'équilibre du système et leur nature.
2. Décrire l'allure des trajectoires au voisinage de ces points d'équilibre.
   Comme nous sommes en dimension 3, chaque point est décrit à l'aide de 3 valeurs propres et donc de 3 directions propres. En fonction des signes de ces valeurs propres, on pourra parler de direction attractive ou répulsive mais aussi de plan attractif ou répulsif.
3. Les solutions du système évoluent selon des trajectoires formant ce qu'on appelle le papillon de Lorentz. En admettant qu'elles restent bornées, comprendre et expliquer leur allure en vous appuyant sur les résultats précédents et en raisonnant sur des alternances d'attractions et de répulsions.
4. Qu'appelle-t-on un système chaotique. En quoi les solutions de notre système le sont-elles ? En déduire que les solutions calculées par Octave sont nécessairement fausses. Pourquoi cela n'est-il pas si gênant pour décrire les solutions du système ?
5. Rechercher l'énoncé du théorème de Poincaré-Bendixson (on en parle entre autres dans le chapitre 4 du film Chaos). Quel aspect chaotique du système de Lorentz est impossible pour un système défini en deux dimensions ?