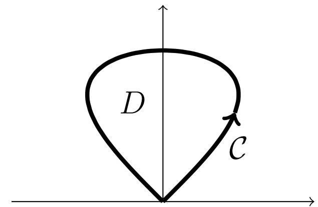
GM2-Miq2-Pl2, Mathématiques *mai 2024*

Contrôle 2

Le seul document autorisé est une feuille manuscrite. La calculatrice est interdite.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : lemniscate **(5 points)**



On considère la portion de lemniscate $\mathcal{C}$ représentée ci-contre et paramétrée par :

$$\gamma(t) = (\cos(t)\sin(t), \sin(t)), \qquad t \in [0, \pi].$$

1. Calculer les intégrales curvilignes : $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} x\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} xy\mathrm{d}y$.
   Indication : $\cos^2(t)\sin^2(t) = \frac{1}{8}(1-\cos(4t))$.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine D délimité par $\mathcal{C}$.
3. Déterminer enfin les coordonnées du barycentre G de D :

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{A}}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{\mathcal{A}}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

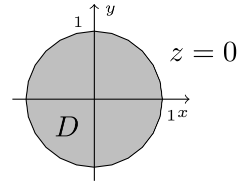
Exercice 2 : Tuyau à section variable **(8 points)**

On considère un tuyau dont la forme permet de passer d'une section circulaire à une section carrée.

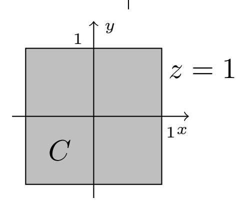
Nous allons proposer une paramétrisation de cette surface et calculer le débit d'un écoulement à l'intérieur de ce tuyau.

On considère la surface S définie par la paramétrisation

$$\psi(\theta, z) = \begin{cases} \left(\frac{\cos(\theta)}{|\cos(\theta z)|}, \quad \frac{\sin(\theta)}{|\cos(\theta z)|}, \quad z\right) & \text{si } \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \\ \left(\frac{\cos(\theta)}{|\cos((\pi/2-\theta)z)|}, \quad \frac{\sin(\theta)}{|\cos((\pi/2-\theta)z)|}, \quad z\right) & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}] \end{cases} \quad \text{et } z \in [0, 1]$$



1. Reconnaître la courbe paramétrée par $\psi(\theta, 0)$ pour $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$. En déduire que la section du tuyau à la hauteur $z = 0$ est le disque ci-contre, noté D.



2. Simplifier les expressions de $\psi(\theta, 1)$ et constater que pour tout θ, l'abscisse ou l'ordonnée de $\psi(\theta, 1)$ est égale à ± 1.
   En déduire que la section du tuyau à la hauteur $z = 1$ est le carré ci-contre, noté C.

On considère un champ de vecteur de la forme

$$\vec{\varphi}(x,y,z) = (f_x(x,y,z),\ f_y(x,y,z),\ 2 - x^2 - y^2)$$

où f_x et f_y sont telles que $\vec{\varphi}$ est tangent à S en tout point de S.

3. À partir de la paramétrisation ψ de S, que faudrait-il calculer pour assurer que $\vec{\varphi}$ est tangent à S ?
   On ne demande pas d'effectuer de calculs, mais on attend une égalité faisant intervenir $\vec{\varphi}$, ψ et des dérivées partielles.
4. Que vaut le flux de $\vec{\varphi}$ à travers S ?
5. Paramétrer D et calculer le flux de $\vec{\varphi}$ à travers D.
6. Calculer de même le flux de $\vec{\varphi}$ à travers C.
7. Appliquer (sans faire de calcul) le théorème de Green-Ostrogradski à la surface fermée $S \cup D \cup C$. Le champ $\vec{\varphi}$ est-il à flux conservatif ?

Exercice 3 : circuit RC **(8 points)**

On considère un circuit RC en régime forcé. La tension $u(t)$ aux bornes du condensateur satisfait l'équation différentielle :

$$(E) : \qquad RCu'(t) + u(t) = e(t),$$

où $e(t)$ représente la force électromotrice.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).

   On suppose que $e(t)$ est une fonction T-périodique admettant une décomposition en série de Fourier : $e(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}t}$. On pose $u_p(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}t}$.

2. En s'autorisant à dériver sous le signe somme, déterminer les coefficients c_n, en fonction des coefficients d_n, tels que u_p soit une solution particulière de (E).
3. Exprimer la solution générale de (E). Que représentent chacun des termes de ces solutions ? Comment se comportent les solutions lorsque t est assez grand ?

   Un exemple : on pose e la fonction 2-périodique définie par :

   $$e(t) = 0 \quad \text{si } t \in]-1, 0[\qquad \text{et} \qquad e(t) = 1 \quad \text{si } t \in]0, 1[.$$

4. Calculer les coefficients de Fourier de e et représenter son spectre.
5. En déduire les coefficients de la solution u_p correspondante et représenter l'allure de son spectre.
6. Comparer les fréquences présentes dans e et dans u_p. Comment se comporte le circuit d'un point de vue fréquentiel ?
7. Justifier que la série de Fourier de u_p est convergente. Peut-on la dériver à l'aide du théorème de dérivation des séries de fonction ?