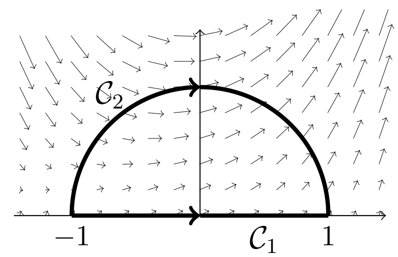
Contrôle 2

Le seul document autorisé est une feuille manuscrite.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : circulations (5 points)

On considère le champ de vecteur représenté ci-contre et défini par :

$$\vec{\varphi}(x,y) = \left(\mathrm{e}^{-x^2} + y\ ,\ \frac{1}{2} + 2xy\right)$$



Nous considérons deux chemins allant du point $(-1,0)$ au point $(1,0)$: le segment horizontal $\mathcal{C}_1$ et le demi-cercle $\mathcal{C}_2$. Nous souhaitons déterminer le chemin sur lequel la contribution du champ $\vec{\varphi}$ au déplacement est la plus forte.

1. Le champ $\vec{\varphi}$ est-il un champ de gradient ?
2. Paramétrer les deux chemins et exprimer sous forme d'une intégrale les circulations $\int_{\mathcal{C}_1} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}$ et $\int_{\mathcal{C}_2} \vec{\varphi} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}$.

   On ne demande pas de calculer ces intégrales pour la bonne raison qu'elles ne sont pas calculables de manière exacte.
3. À l'aide de la formule de Green-Riemann, déterminer laquelle des deux circulations est la plus grande.

Exercice 2 : calcul de flux (5 points)

Soit S la sphère unité et soit $\vec{\varphi}(x,y,z) = (0,0,z^2)$.

1. Représenter l'allure du champ $\vec{\varphi}$ sur un plan vertical (*i.e.* contenant l'axe Oz).
2. En déduire simplement le flux de $\vec{\varphi}$ à travers S.
3. Déterminer le flux de $\vec{\varphi}$ à travers le disque unité situé dans le plan Oxy.
4. En déduire, à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski, le flux de $\vec{\varphi}$ à travers S_+, la demi-sphère située dans le demi-espace $z \geqslant 0$.
   Indication : passer en coordonnées sphériques $(r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi))$ *; on rappelle que le jacobien associé est* $r^2|\cos(\phi)|$.

Exercice 3 : circuit RL (5 points)

On considère un circuit constitué d'une résistance et d'une bobine en série. On l'alimente avec une force électromotrice $e(t)$. La tension $u(t)$ aux bornes de la bobine satisfait l'équation intégrale

$$u(t) + \frac{R}{L}\int u(\tau)\mathrm{d}\tau = e(t), \qquad \text{où } \int u(\tau)\mathrm{d}\tau \text{ désigne une primitive de } u.$$

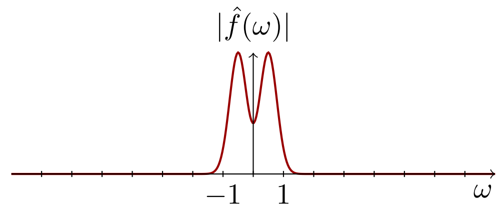
Nous nous intéressons au cas où le forçage $e(t)$ est une fonction périodique et nous cherchons la solution $u(t)$ correspondante en régime permanent.
La fonction $e(t)$ est une fonction 2π-périodique que l'on peut décomposer en série de Fourier : $e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.
On cherche notre solution sous la même forme : $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$. On supposera que $d_0 = 0$.

1. En supposant qu'on peut intégrer les termes sous le signe somme, intégrer en t la série de Fourier de u et déterminer ainsi une primitive $\int u(\tau)\mathrm{d}\tau$ sous forme d'une série de Fourier.
2. Injecter les trois séries de Fourier dans l'équation et déterminer les coefficients d_n en fonction des coefficients c_n de e.
3. Interpréter cette relation : quelles fréquences présentes dans le forçage $e(t)$ sont les mieux transmises à la tension $u(t)$? Comment se comporte le circuit ?

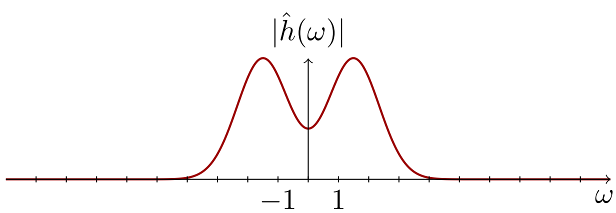
Exercice 4 : attribution d'une bande de fréquences (5 points)

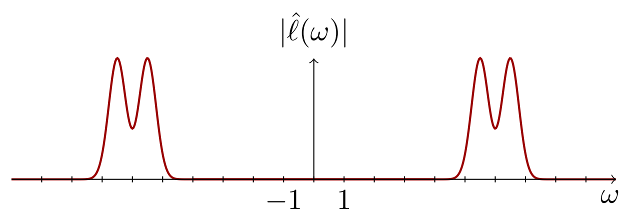
On considère une fonction f, dont le spectre (en module) est donné ci-contre.

Rappels : $g(t) = f(t+a) \implies \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega}$;
$g(t) = f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt} \implies \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - b)$;
$g(t) = f(ct) \implies \hat{g}(\omega) = \frac{1}{|c|}\hat{f}(\frac{\omega}{c})$.



1. On pose $g(t) = \cos(6t)f(t)$. Déterminer $\hat{g}(\omega)$ et représenter le graphe de $|\hat{g}(\omega)|$.
2. On considère maintenant la fonction h dont le spectre est donné ci-dessous. On souhaite la transformer en une fonction ℓ de spectre donné à côté (nous souhaitons ainsi modifier la bande de fréquences composant le signal h).
   Toujours à l'aide de propriétés, exprimer la fonction $\ell(t)$ en fonction de $h(t)$ de manière à obtenir le spectre $|\hat{\ell}|$ voulu.





3. Un récepteur reçoit le signal $\ell(t)$. Quelle opération sur ℓ doit-il effectuer pour retrouver le signal $h(t)$ initial ?