GM2-Miq2-Pl2, Mathématiques *juin 2023*

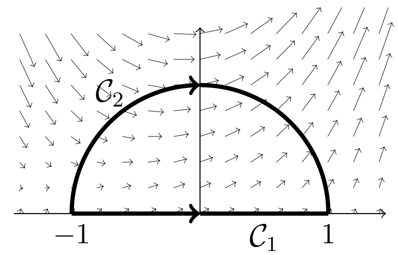
Contrôle 2

Le seul document autorisé est une feuille manuscrite.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : circulations (5 points)

On considère le champ de vecteur représenté ci-contre et défini par :

$$\vec{\varphi}(x,y) = \left(\mathrm{e}^{-x^2} + y\ ,\ \frac{1}{2} + 2xy\right)$$



Nous considérons deux chemins allant du point $(-1,0)$ au point $(1,0)$: le segment horizontal $\mathcal{C}_1$ et le demi-cercle $\mathcal{C}_2$. Nous souhaitons déterminer le chemin sur lequel la contribution du champ $\vec{\varphi}$ au déplacement est la plus forte.

1. Le champ $\vec{\varphi}$ est-il un champ de gradient ?

   On applique le critère du lemme de Schwarz : $\frac{\partial(\mathrm{e}^{-x^2}+y)}{\partial y} = 1$ et $\frac{\partial(\frac{1}{2}+2xy)}{\partial x} = 2y$. Ces dérivées sont différentes donc $\vec{\varphi}$ n'est pas un champ de gradient.

2. Paramétrer les deux chemins et exprimer sous forme d'une intégrale les circulations $\int_{\mathcal{C}_1} \vec{\varphi}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ et $\int_{\mathcal{C}_2} \vec{\varphi}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$.

   On ne demande pas de calculer ces intégrales pour la bonne raison qu'elles ne sont pas calculables de manière exacte.

   Le segment se paramètre (en respectant l'orientation) par $\gamma_1(t) = (t,0)$ avec $t \in [-1,1]$. Ainsi :
   $$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{\varphi}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{-1}^{1} <(\mathrm{e}^{-t^2}+0, \tfrac{1}{2}+0)|(1,0)>\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$
   Le demi-cercle se paramètre (en respectant l'orientation) par $\gamma_2(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ avec $\theta \in [\pi, 0]$. Ainsi :
   $$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{\varphi}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\pi}^{0} <(\mathrm{e}^{-\cos^2(\theta)} + \sin(\theta), \tfrac{1}{2} + 2\cos(\theta)\sin(\theta))|(-\sin(\theta), \cos(\theta))>\mathrm{d}\theta$$
   $$= \int_{\pi}^{0} -\sin(\theta)\mathrm{e}^{-\cos^2(\theta)} - \sin^2(\theta) + \frac{1}{2}\cos(\theta) + 2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\ \ \mathrm{d}\theta.$$

3. À l'aide de la formule de Green-Riemann, déterminer laquelle des deux circulations est la plus grande.

Appliquons la formule de Green-Riemann au demi-cercle $\mathcal{C}$ orienté dans le sens trigonométrique et à son demi-disque intérieur D :

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_D \frac{\partial(\frac{1}{2} + 2xy)}{\partial x} - \frac{\partial(\mathrm{e}^{-x^2} + y)}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D 2y - 1 \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^1 (2r\sin(\theta) - 1) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

Ce résultat est négatif (car $3\pi > 8$). Or, en tenant compte des orientations, cette circulation est égale à $\int_{\mathcal{C}_1} \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \int_{\mathcal{C}_2} \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$. Nous en déduisons que

$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \; > \; \int_{\mathcal{C}_1} \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$$

C'est le long du demi-cercle que le champ $\vec{\varphi}$ contribue le plus.

Exercice 2 : calcul de flux (5 points)

Soit S la sphère unité et soit $\vec{\varphi}(x, y, z) = (0, 0, z^2)$.

1. Représenter l'allure du champ $\vec{\varphi}$ sur un plan vertical (*i.e.* contenant l'axe Oz).

   Le champ $\vec{\varphi}$ est vertical, toujours dirigé vers les z croissant. Sa norme est nulle en $z = 0$ et augmente quand on s'éloigne verticalement du plan $z = 0$. On observe une symétrie de plan $z = 0$: $\vec{\varphi}(x, y, z) = \vec{\varphi}(x, y, -z)$.

2. En déduire simplement le flux de $\vec{\varphi}$ à travers S.

   La sphère S est également symétrique par rapport au plan $z = 0$. En exploitant cela (et en faisant une figure claire), on comprend que la quantité de champ qui entre dans la sphère (du côté $z < 0$) est exactement égale à la quantité qui en sort (du côté $z > 0$). Ainsi, par symétrie, peu importe comment la sphère est orientée, le flux de $\vec{\varphi}$ à travers elle est nul.

3. Déterminer le flux de $\vec{\varphi}$ à travers le disque unité situé dans le plan Oxy.

   Ce disque est situé dans le plan Oxy. Or sur ce plan, $z = 0$ et le champ $\vec{\varphi}$ est donc nul. Ainsi son flux à travers le disque est nul.

4. En déduire, à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski, le flux de $\vec{\varphi}$ à travers S_+, la demi-sphère située dans le demi-espace $z \geqslant 0$.
   Indication : passer en coordonnées sphériques $(r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi))$ *; on rappelle que le jacobien associé est* $r^2|\cos(\phi)|$.

   Considérons la surface constituée de S_+ et du disque D précédent. C'est une surface fermée que nous orientons vers l'extérieur. Notons B son intérieur et appliquons le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iint_{S_+ \cup D} \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_B \mathrm{div}\vec{\varphi} \mathrm{d}V = \iiint_B 2z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Par ailleurs $\iint_{S_+ \cup D} \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_+} \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_D \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_+} \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ puisque le flux à travers le disque est nul. Il ne reste donc qu'à calculer l'intégrale triple en passant aux coordonnées sphériques :

$$\iint_{S_+} \vec{\varphi} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} 2r\cos(\phi) \times r^2 \cos(\phi) \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 3 : circuit RL (5 points)

On considère un circuit constitué d'une résistance et d'une bobine en série. On l'alimente avec une force électromotrice $e(t)$. La tension $u(t)$ aux bornes de la bobine satisfait l'équation intégrale

$$u(t) + \frac{R}{L}\int u(\tau)\mathrm{d}\tau = e(t), \qquad \text{où } \int u(\tau)\mathrm{d}\tau \text{ désigne une primitive de } u.$$

Nous nous intéressons au cas où le forçage $e(t)$ est une fonction périodique et nous cherchons la solution $u(t)$ correspondante en régime permanent.
La fonction $e(t)$ est une fonction 2π-périodique que l'on peut décomposer en série de Fourier : $e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.
On cherche notre solution sous la même forme : $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$. On supposera que $d_0 = 0$.

1. En supposant qu'on peut intégrer les termes sous le signe somme, intégrer en t la série de Fourier de u et déterminer ainsi une primitive $\int u(\tau)\mathrm{d}\tau$ sous forme d'une série de Fourier.

   Intégrons la série en s'autorisant à intégrer sous le signe somme :

$$\begin{aligned}\int u(\tau)\mathrm{d}\tau &= \int \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\tau}\right)\mathrm{d}\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\tau}\mathrm{d}\tau \qquad \text{(étape soumise à conditions, cf Analyse 4)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n} \quad + \quad \text{constante} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d_n}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \quad + \quad K\end{aligned}$$

   Remarque : nous obtenons encore une série de Fourier, dont la convergence est a priori garantie si celle de la série initiale l'est, puisque ses coefficients $\frac{d_n}{\mathrm{i}n}$ tendent vers 0 plus rapidement que les coefficients d_n de u. Mais cela mériterait une étude plus rigoureuse comme en cours d'analyse.

2. Injecter les trois séries de Fourier dans l'équation et déterminer les coefficients d_n en fonction des coefficients c_n de e.

   Injectons :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + \frac{R}{L}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d_n}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} + \frac{R}{L}K = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

   Nous obtenons une égalité entre séries de Fourier. Nous pouvons identifier leurs coefficients :

$$\forall n \in \mathbf{Z}^*, \quad d_n + \frac{R}{L}\frac{d_n}{\mathrm{i}n} = c_n \qquad \text{donc} \qquad d_n = \frac{c_n}{1+\frac{R}{L\mathrm{i}n}} = \frac{L\mathrm{i}n}{L\mathrm{i}n + R}c_n.$$

Pour $n=0$, en rappelant que d_0 est supposé nul, nous obtenons : $\frac{RK}{L}=c_0$; ce qui n'a aucun intérêt pour la suite de l'exercice.

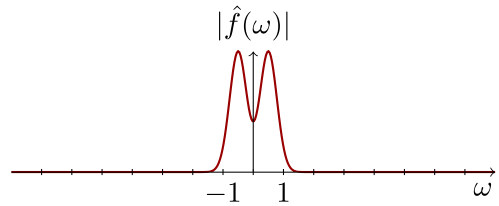
3. Interpréter cette relation : quelles fréquences présentes dans le forçage $e(t)$ sont les mieux transmises à la tension $u(t)$? Comment se comporte le circuit ?

   Lorsque n tend vers $\pm\infty$, $|fracLinLin+R|$ converge vers 1. Autrement dit, pour les très hautes fréquences, on peut considérer que $d_n \approx c_n$. Ainsi les composantes à haute fréquence présentes dans $e(t)$ sont transmises fidèlement à la tension $u(t)$.
   Au contraire, lorsque n est faible (plus précisément petit par rapport à $\frac{R}{L}$), le terme $fracLinLin+R$ est également faible. Les basses fréquences composant $e(t)$ sont donc très atténuées dans la réponse $u(t)$ du circuit.
   Conclusion : le circuit se comporte ici comme un filtre passe-haut.

Exercice 4 : attribution d'une bande de fréquences (5 points)

On considère une fonction f, dont le spectre (en module) est donné ci-contre.

Rappels : $g(t)=f(t+a) \implies \hat{g}(\omega)=\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega}$;
$g(t)=f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt} \implies \hat{g}(\omega)=\hat{f}(\omega-b)$;
$g(t)=f(ct) \implies \hat{g}(\omega)=\frac{1}{|c|}\hat{f}(\frac{\omega}{c})$.

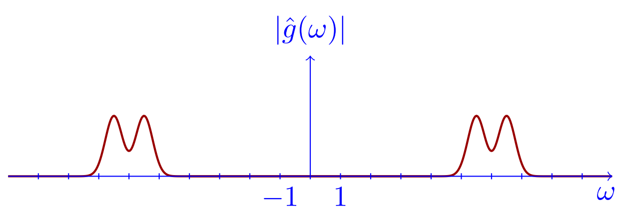


1. On pose $g(t)=\cos(6t)f(t)$. Déterminer $\hat{g}(\omega)$ et représenter le graphe de $|\hat{g}(\omega)|$.

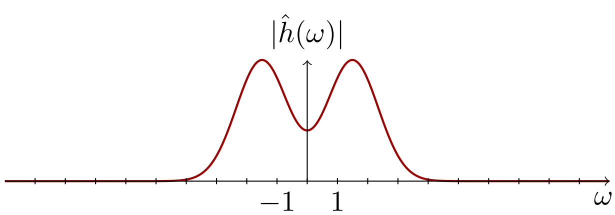
   En écrivant $\cos(6t)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{6\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}t})$, nous pouvons reconnaître une formule de déphasage-décalage :

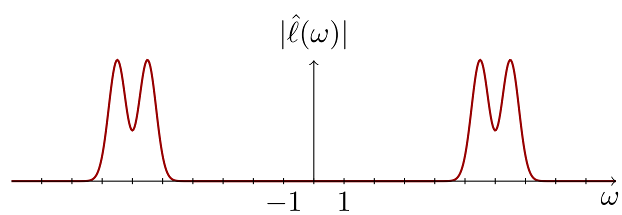
$$\hat{g}(\omega)=\tfrac{1}{2}\widehat{\mathrm{e}^{6\mathrm{i}t}f(t)}+\tfrac{1}{2}\widehat{\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}t}f(t)}=\frac{1}{2}\hat{f}(\omega-6)+\frac{1}{2}\hat{f}(\omega+6).$$

   Autrement dit, le spectre est décalé de 6 vers la droite et de 6 vers la gauche, les deux parties ainsi translatées étant également divisées par 2.



2. On considère maintenant la fonction h dont le spectre est donné ci-dessous. On souhaite la transformer en une fonction ℓ de spectre donné à côté (nous souhaitons ainsi modifier la bande de fréquences composant le signal h).
   Toujours à l'aide de propriétés, exprimer la fonction $\ell(t)$ en fonction de $h(t)$ de manière à obtenir le spectre $|\hat{\ell}|$ voulu.





Pour passer de h à ℓ, il faut d'abord contracter son spectre pour le ramener de la bande de fréquence $[-3, 3]$ à la bande de fréquence $[-1, 1]$. Il faut donc le contracter d'un facteur 3. Nous posons ainsi $h_1(t) = h(\frac{t}{3})$, pour obtenir $\widehat{h_1}(\omega) = 3\widehat{h}(3\omega)$. Comme nous ne souhaitons pas augmenter l'amplitude du spectre, nous divisons ensuite h_1 par 3.

Après cette étape de contraction, nous devons translater le spectre comme dans la question 1, mais sans diminuer l'amplitude. Il faut donc multiplier notre fonction précédente par $2\cos(6t)$. Une solution possible du problème est ainsi :

$$\ell(t) = 2\cos(6t) \times \frac{1}{3} h(\tfrac{t}{3}).$$

3. Un récepteur reçoit le signal $\ell(t)$. Quelle opération sur ℓ doit-il effectuer pour retrouver le signal $h(t)$ initial ?

Pour retrouver le signal $h(t)$ initial, le récepteur doit simplement inverser les opérations effectuées :

$$h(t) = \frac{3\ell(3t)}{2\cos(18t)}.$$