

CONTRÔLE 2

Le seul document autorisé est une feuille manuscrite.

Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.

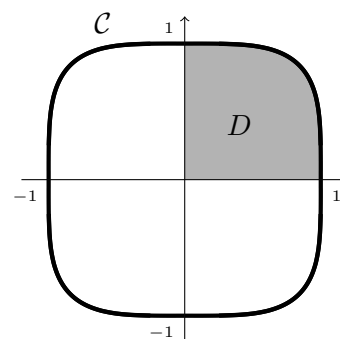
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : aire d'un squircle (7 points)

Un squircle (fusion de "square" et "circle" en anglais) est une courbe ressemblant à un carré arrondi, que l'on retrouve dans le design actuel (notamment dans des logos). Le but de cet exercice est d'en étudier le plus classique, la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre définie par l'équation cartésienne

$$x^4 + y^4 = 1.$$

Nous souhaitons notamment déterminer l'aire qu'elle délimite. Comme il est impossible de l'obtenir analytiquement, nous nous contenterons d'expressions sous forme intégrales.



L'aire recherchée est, pour des raisons de symétries évidentes, égale au quadruple de l'aire de la partie D grisée sur la figure. Nous proposons trois méthodes : pour chacune, il s'agira de conclure avec l'expression de l'aire $\mathcal{A}(D)$ sous forme d'une intégrale simple.

1. Paramétrer le domaine D puis exprimer l'aire de D sous forme intégrale à l'aide du théorème de Fubini.
2. Montrer que la partie de $\mathcal{C}$ qui borde D peut être paramétrée par $\gamma(t) = (\sqrt{\cos(t)}, \sqrt{\sin(t)})$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Exprimer de nouveau l'aire de D sous forme intégrale en utilisant le changement de variable $\begin{cases} x = r\sqrt{\cos(t)} \\ y = r\sqrt{\sin(t)} \end{cases}$
4. Exprimer enfin l'aire de D en utilisant la paramétrisation γ et la formule $\mathcal{A} = \int x dy$. On précisera bien les conditions d'application de cette formule.

Dans les trois cas, on obtient une aire totale du squircle approximativement égale à 3,70815.

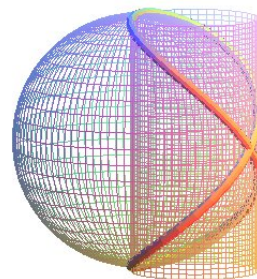
Exercice 2 : fenêtre de Viviani (6 points)

La courbe ci-contre est l'intersection de la sphère unité S d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

et du cylindre C d'équation

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$



source : mathcurve.com

Nous notons $\mathcal{C}$ la partie de cette courbe située dans le demi-espace $z \geq 0$ (c'est la courbe fermée « du haut »).

1. Soit $\vec{\varphi}_1(x, y, z) = (-y, x, z)$. Calculer la circulation de $\vec{\varphi}_1$ le long de $\mathcal{C}$, à l'aide de la formule de Stokes appliquée à une surface bien choisie.
2. Faire de même avec le champ $\vec{\varphi}_2(x, y, z) = (y, x, x^2 + y^2 + z^2)$.

La fenêtre de Viviani est la partie F de la sphère S délimitée par la courbe $\mathcal{C}$. Nous allons la paramétrer afin d'en calculer l'aire.

Nous savons que la sphère S est paramétrée par

$$\psi(\theta, \phi) = (\cos(\phi) \cos(\theta), \cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi)), \quad \theta \in [-\pi, \pi[, \quad \phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

3. Montrer que la partie F est le sous-ensemble $\{\psi(\theta, \phi) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } |\theta| \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$.
Indication : pour être à l'intérieur du cylindre C , il faut satisfaire $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.
4. Calculer l'aire de la fenêtre de Viviani. On admet que l'élément d'aire associé à notre paramétrisation de la sphère est donné par $dS = |\cos(\phi)| d\theta d\phi$.

Exercice 3 : série de Fourier d'une dérivée (9 points)

Soit f une fonction 2π -périodique admettant une décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}.$$

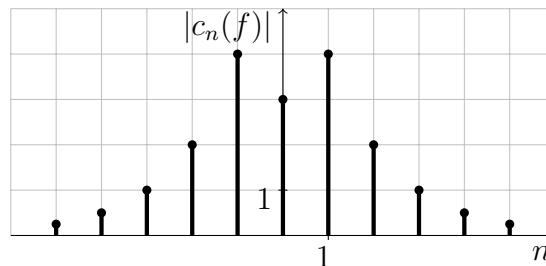
1. Supposons que les coefficients c_n satisfont : $\exists \lambda \in \mathbf{R}_+, \forall n \in \mathbf{Z}^*, |c_n| \leq \frac{\lambda}{n^3}$.

Justifier alors que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout t : $f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i n c_n e^{int}$.

2. Analyser le résultat précédent en termes de fréquences :

Quelle relation lie les coefficients de Fourier de f' à ceux de f ? Soit f la fonction dont le spectre est représenté ci-contre (en module). Représenter l'allure du spectre de sa dérivée f' .

Comment sont transformées les basses et les hautes fréquences de f lorsqu'on la dérive ?



3. On considère la fonction g 2π -périodique définie sur $] -\pi, \pi[$ par $g(t) = t$. Calculer ses coefficients de Fourier complexes.

La fonction g ne satisfait pas l'hypothèse de la question 1. Regardons si sa conclusion est tout de même vraie.

4. Quelle est la dérivée de g ? La conclusion de la question 1 est-elle vraie dans ce cas ?
5. Soit h la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $h(t) = \frac{t^2}{2}$.
À l'aide du résultat de la question 1, déterminer les coefficients de Fourier de h à partir des coefficients de Fourier de g . Ne pas oublier c_0 !
6. Évaluer en π la série de Fourier ainsi obtenue. Est-elle bien égale à $h(\pi)$?