

CORRIGÉ DU CONTRÔLE 2

Le seul document autorisé est une feuille de notes A4 manuscrite.

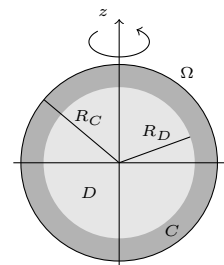
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Moment cinétique (4 points)

On fait tourner une pièce de 2 euros comme une toupie, avec une vitesse angulaire v . On cherche à calculer le moment cinétique de la pièce par rapport à son axe de rotation.

La pièce est représentée par la surface Ω constituée d'un disque homogène D et d'une couronne homogène $C : \Omega = D \cup C$. Nous noterons ρ_D la densité de masse du disque et ρ_C la densité de masse de la couronne.



Le moment cinétique en un point P de Ω par rapport à l'axe Oz est donné (en norme) par

$$M_{P/Oz} = d_P \cdot \rho \cdot v,$$

où d_P est la distance du point P à l'axe Oz et ρ la densité de masse de la pièce au point P .

Le moment cinétique total de la pièce Ω par rapport à l'axe Oz est la somme de tous les moments en chaque point de Ω :

$$M_{\Omega/Oz} = \iint_{\Omega} M_{P/Oz} dS.$$

Calculer ce moment cinétique : on commencera par exprimer d_P en fonction des coordonnées polaires de P et par paramétrer les surfaces D et C .

Soit P un point de Ω de coordonnées polaires (r, θ) . Sa distance à l'axe Oz est donnée par $d_P = r |\cos(\theta)|$.

La disque D est paramétré en polaire par $D = \{(r, \theta) ; r \in [0, R_D], \theta \in [0, 2\pi]\}$ et la couronne par $C = \{(r, \theta) ; r \in [R_D, R_C], \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Ainsi, le moment cinétique total est donné par

$$\begin{aligned} M_{\Omega/Oz} &= \int_0^{R_D} \int_0^{2\pi} r |\cos(\theta)| \rho_D v \cdot r d\theta dr + \int_{R_D}^{R_C} \int_0^{2\pi} r |\cos(\theta)| \rho_C v \cdot r d\theta dr \\ &= 4\rho_D v \frac{R_D^3}{3} + 4\rho_C v \frac{R_C^3 - R_D^3}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 2 : débit d'un écoulement (6 points)

On considère dans l'espace le triangle T de sommets $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$. On considère un écoulement dont le champ de vitesse est donné par

$$\vec{v}(x, y, z) = (0, x, x).$$

1. Représenter le triangle T et l'allure du champ $\vec{v}$.
2. Calculer le flux de $\vec{v}$ à travers T .

On peut paramétrer T par $T = \{(x, y, 0) ; x \in [0, 1], y \in [0, x]\}$. Un vecteur élément de surface correspondant est $d\vec{S} = (1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0)dx dy = (0, 0, 1)dx dy$. Il correspond à une orientation de T vers le haut. Alors

$$\iint_T \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x x dy dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Remarque : on peut décomposer $\vec{v}$ en $\vec{v} = (0, x, 0) + (0, 0, x)$. Le premier terme est un vecteur horizontal tangent à T . Le second est un vecteur vertical normal à T , orienté dans le même sens que notre orientation de T et de norme x . On retrouve bien $\iint_T \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_T x$.

3. Déterminer les lignes de champ de $\vec{v}$.

On cherche les courbes $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ telles que $\vec{\gamma}'$ et $\vec{v}(\gamma)$ sont colinéaires : $(x', y', z') = \lambda(0, x, x)$. On obtient $x' = 0$ et $y' = z'$. Les lignes de champ de $\vec{v}$ sont les droites d'équation $\{x = c, z = y + d\}$.

4. On considère le triangle T' de sommets $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ et $(1, 2, 1)$.
Montrer, à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski, que le flux de $\vec{v}$ à travers T' est égal à son flux à travers T .

Le triangle T' est obtenu en traduisant le triangle T d'un vecteur $(0, 1, 1)$. Cette translation se fait selon les lignes de champ obtenues précédemment.

Considérons comme surface le prisme S formé par les triangles T , T' et les trois parallélogrammes qui les lient. Notre champ $\vec{v}$ est tangent à ces parallélogrammes.

On oriente S vers l'extérieur du prisme. D'après le théorème de Green-Ostrogradski,

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{v}) dV.$$

Comme le flux de $\vec{v}$ à travers les parallélogrammes est nul et que $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$, il reste

$$\iint_T \vec{v} \cdot d\vec{S} + \iint_{T'} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0.$$

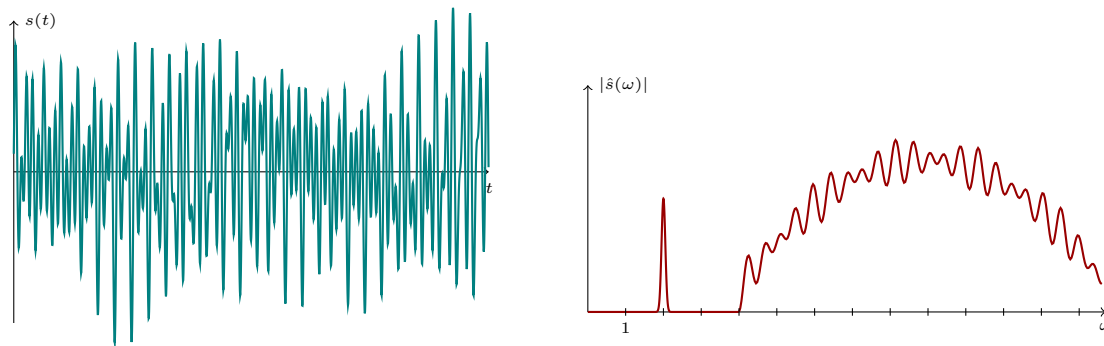
En ayant orienté le S vers l'extérieur, nous avons orienté T vers le bas et T' vers le haut. Ainsi

$$-\frac{1}{3} + \iint_{T'} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0,$$

et le résultat s'en déduit.

Exercice 3 : Régime d'un moteur (10 points)

On enregistre le son $s(t)$ produit par un moteur en rotation. Le bruit important généré rend l'analyse du son difficile. On calcule alors le spectre de s donné ci-dessous (la partie gauche du spectre est symétrique à celle de droite). La partie du spectre pour $|\omega| > 4$ est directement liée au bruit.



1. Interpréter le spectre de s : que peut-on dire du bruit ? Que peut représenter pour le moteur le pic autour de $\omega = 2$?

On constate sur le spectre que le bruit ne concerne que les fréquences supérieures à 4 et qu'il a une grande amplitude par rapport au reste du spectre. Le bruit qui nous intéresse est donc un bruit puissant, exclusivement à hautes fréquences.

Le pic autour de $\omega = 2$ n'est pas lié au bruit et correspond donc à une caractéristique du seul moteur. Cette partie du spectre se concentre autour d'une seule fréquence. Autrement dit, si on ne tient pas compte du bruit, le son enregistré ne contient qu'une seule fréquence et ressemble donc à une simple sinusoïde. On peut imaginer que cette fréquence $\omega = 2$ est la fréquence de rotation du moteur. On observe ainsi sur cette partie du spectre le régime du moteur.

On cherche à éliminer mathématiquement le bruit. On traite le son $s(t)$ à l'aide d'un système électronique. Son action est décrite par une équation différentielle de la forme

$$y''(t) - \alpha^2 y(t) = -s(t).$$

2. Passer à la transformée de Fourier dans cette équation et exprimer $\hat{y}(\omega)$ en fonction de $\hat{s}(\omega)$.

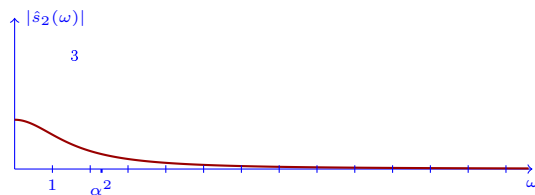
$$\widehat{y''}(\omega) - \alpha^2 \hat{y}(\omega) = -\omega^2 \hat{y}(\omega) - \alpha^2 \hat{y}(\omega) = -\hat{s}(\omega).$$

On en déduit

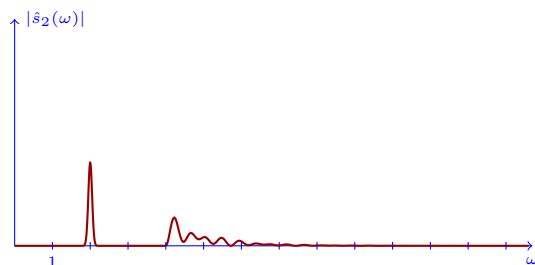
$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2} \hat{s}(\omega).$$

3. Comment choisir α de manière à ce que la solution y fournisse une version sans bruit de s ? Représenter alors l'allure du spectre de la solution y . Représenter également l'allure du graphe de y .

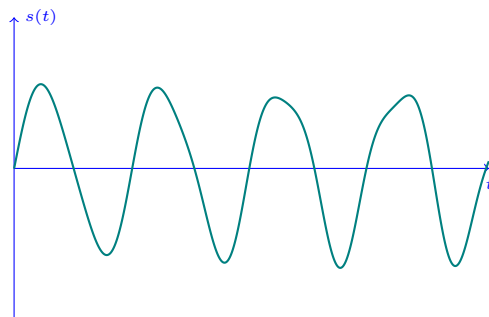
Représentons la fonction $\omega \mapsto \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2}$:



Le spectre de y est obtenu en multipliant le spectre de s par cette fonction. On voit que les basses fréquences sont préservées ou légèrement atténuées tandis que les hautes fréquences sont fortement atténuées voire quasiment supprimées. En choisissant bien α (par exemple avec $\alpha^2 \approx 3$), on peut s'arranger pour que la fréquence 2 ne soit pas trop atténuée et les fréquences supérieures à 4 fortement atténuées. Le spectre de y ressemblerait alors à



Ce spectre ne contient essentiellement qu'une seule fréquence. La fonction y devrait donc ressembler à une sinusoïde de fréquence 2, c'est-à-dire une fonction du type de $\sin(2t)$.



4. Soit $\beta > 0$ et h_β la fonction $t \mapsto e^{-\beta|t|}$. Calculer sa transformée de Fourier.

Calculons

$$\hat{h}_\beta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}.$$

5. Exprimer la solution y précédente sous forme d'un produit de convolution.

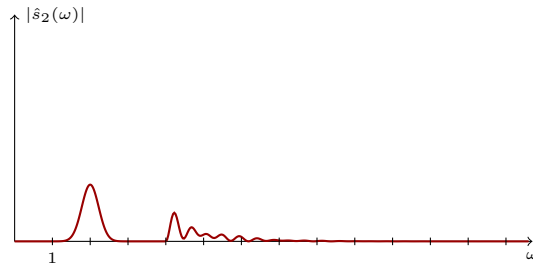
Avec $\beta = \alpha$, nous avons obtenu

$$\hat{y} = \frac{1}{2\alpha} \hat{h}_\alpha \hat{s} = \frac{1}{2\alpha} \widehat{h_\alpha * s}.$$

Par unicité de la transformée de Fourier, on en déduit que

$$y = \frac{1}{2\alpha} h_\alpha * s.$$

6. Quelques semaines plus tard, on enregistre de nouveau le son du moteur et on effectue le même traitement mathématique. On a obtenu le spectre ci-dessous.



Comment interpréter pour le moteur le changement d'allure autour de $\omega = 2$?

On constate que le pic autour de $\omega = 2$ a été atténué, et surtout s'est un peu étalé ; il est moins concentré autour de 2. Cela signifie que le son est moins pur qu'au début, ce n'est plus une sinusoïde idéale. Ce changement peut traduire une usure du moteur : il ne tourne plus à une fréquence parfaite. Les frottements, un peu de jeu dans les rouages, font que la rotation n'est plus aussi régulière et son spectre contient un peu plus de fréquences que lorsqu'il était neuf.

Cette analyse spectrale est une façon de détecter simplement l'usure de systèmes mécaniques sans avoir à les démonter.