Contrôle 2

Le seul document autorisé est une feuille de notes A4 manuscrite.
Toutes les réponses doivent être correctement rédigées et rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Séries de Fourier (7 points)

On s'intéresse à un système mécanique décrit en régime libre par l'équation

$$y'(t) + y(t) = 0.$$

On lui impose une excitation f représentée par la fonction triangle 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(t) = |t|$.
L'évolution du système est alors modélisée par l'équation

$$y'(t) + y(t) = f(t).$$

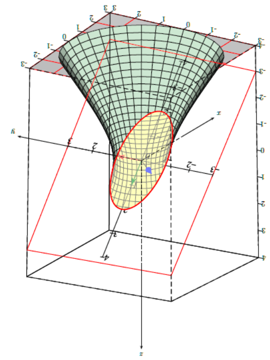
Résoudre complètement cette équation différentielle : pour en déterminer une solution particulière, on commencera par écrire f sous la forme $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{int}$ (après avoir justifié qu'une telle écriture existe). Puis on cherchera une solution y de la même forme (on s'autorisera pour cela à dériver sous le signe somme).

Décrire la solution générale du problème : comment évolue-t-elle au cours du temps ? Comment se répartissent ses fréquences par rapport à celles de f ? (On pourra par exemple représenter les spectres de f et de la solution particulière obtenue.)

Exercice 2 : Vortex (13 points)

Le but de cet exercice est de modéliser un tourbillon, c'est-à-dire un écoulement fluide principalement en rotation autour d'un axe, puis d'en calculer le débit à travers une section.

Un joli tourbillon



Portion d'hyperboloïde et section elliptique

- Nous considérons que l'écoulement se fait à l'intérieur de l'hyperboloïde à une nappe H défini par l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1 \quad \text{ou en coordonnées cylindriques} \quad r^2 = z^2 + 1, \quad \text{pour } z \in [0, 1].$$

- Nous notons V le volume délimité par H et les deux disques horizontaux aux hauteurs $z = 0$ et $z = 1$.
- Nous considérerons ensuite une section de V obtenue en intersectant un plan avec V. Il s'agit d'une surface S délimitée par une ellipse.

1. Calculer le volume de V et donner une paramétrisation de H.
2. On commence par étudier l'écoulement défini à l'intérieur de H par le champ de vitesse

$$\vec{v}_1(x, y, z) = \left(-\frac{xz}{(z^2+1)^2}, \ -\frac{yz}{(z^2+1)^2}, \ -\frac{1}{z^2+1}\right) \quad \text{ou} \quad \vec{v}_1(r, \theta, z) = -\frac{rz}{(z^2+1)^2}\vec{u}_r - \frac{1}{z^2+1}\vec{u}_z.$$

   (a) Montrer que $\vec{v}_1$ est à divergence nulle.

   (b) Montrer que sur H, $\vec{v}_1$ est tangent à H.

   (c) Représenter l'allure générale des lignes de champ de $\vec{v}_1$.

   (d) Calculer le flux de $\vec{v}_1$ à travers la section S.

3. Proposer un champ de vecteur $\vec{v}_2(x, y, z)$ (ou $\vec{v}_2(r, \theta, z)$) tournant autour de l'axe Oz et de divergence nulle. Justifier brièvement votre choix pour modéliser notre problème.
4. On considère maintenant le champ $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Calculer le flux de $\vec{v}$ à travers S.